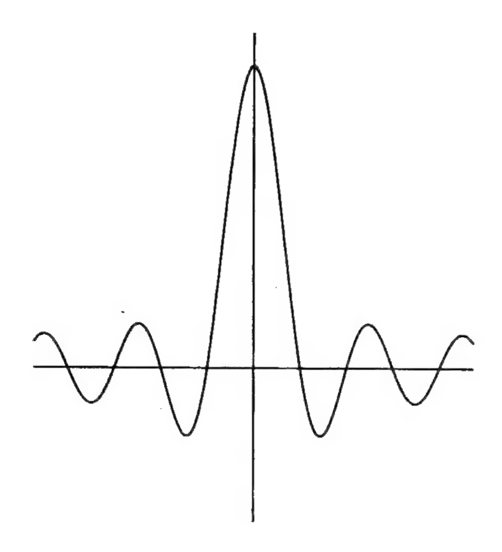
الطرائق الرياضية

في

تحليل فوريير



تأليف

الدكتور محمد بن عبدالرحمن القويز

أستاذ الرياضيات بجامعة الملك سعود

مقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على نبيه، وبعد

هذا الكتاب صيغة موسَّعة ومطوَّرة لمذكرة استخدمتها خلال السنوات الثلاث الماضية في تدريس مقرر "الطرائق الرياضية"، وهو المقرر الذي يقدم لطلاب وطالبات الرياضيات في السنة الثالثة أو الرابعة من برنامج البكالوريوس بجامعة الملك سعود.

غالبا ما يطلق مصطلح "الطرائق الرياضية" على تلك المفاهيم والأساليب التي تستخدم في حل المعادلات التفاضلية والمسائل الحدية وغيرها من المسائل ذات الصبغة التطبيقية، وفي تمثيل تلك الحلول. وهي تشكل جانبًا مهمًّا من الرياضيات التطبيقية وأداة لا غنى عنها للمهتمين بالفيزياء النظرية.

وحقيقة الأمر أن "الطرائق الرياضية" عبارة فضفاضة تشمل موضوعات كثيرة لا سبيل لنا إلى حصرها في كتاب واحد. والذي يهمنا في هذه المعالجة هو تلك الطرائق المرتبطة بنظرية شتورم - ليوفيل، والتي تشكل في مجملها تعميما لنظرية فورير، وبذلك تكتسب موضوعات الكتاب قدرًا من الترابط، ضمن هذا الإطار، قد لا يتوافر لها بدونه.

نقدم في الفصل الأول نبذة مختصرة عن فضاء الضرب الداخلي بالقدر الذي نحتاج إليه لصياغة المفاهيم وبناء الهياكل الرياضية في الفصول اللاحقة. وفي الفصل الثاني نستعرض نظرية شتورم - ليوفيل حول توزيع القيم والدوال الذاتية (أو ما يسمى

بالتحليل الطَّيفي) للمؤثِّر الخطي التفاضلي تحت شروط معينة (الاقتران الذاتي)، ونثبت منها ما يتيسَّر لنا برهانه في إطار هذه المعالجة.

في الفصل الثالث نرى أن نظرية فوريير حول نشر الدوال الدورية، وهي موضوع الفصل، ما هي إلا حالة خاصة من نظرية شتورم ـ ليوفيل العادية، كما نرى في الفصلين الرابع والخامس أن الدوال الخاصة الشائعة، مثل كثيرات حدود لوجاندر ودوال بيسل، تنشأ كحلول لحالات خاصة أخرى (شاذة) لمسألة شتورم ـ ليوفيل. وفي الفصلين الأخيرين نلتفت إلى التحويلات التكاملية: تحويل فوريير المستمد من من سلسلة فوريير، ومنه نحصل على تحويل لابلاس بنقلة شكلية.

يتطلب فهم مادة الكتاب إلماما جيدًا بحساب التفاضل والتكامل، بما في ذلك سلاسل الأعداد، كما يتطلب معرفة بسيطة بطرائق حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية. ومن المفيد أيضا أن يكون لدى القارىء فكرة عن الجبر الخطي في أبسط صوره. بهذه الخلفية يستطيع الطالب أن يشق طريقه في مادة الكتاب دون عناء كبير إلى أن يصل إلى الفصل السادس، حيث سيصطدم بنظرية التقارب المسقوف التي تعتبر من نظريات التحليل الحقيقي المتقدم، وقد استخدمت لإثبات اتصال تحويل فوريير لأي دالة قابلة للتكامل. وقد كان بالإمكان وضع شروط إضافية على الدالة والاستغناء عن هذه النظرية، لكننا فضلنا الإبقاء على الحد الأدنى من الشروط اللازمة لتحقيق هذه الغاية وعدم الإخلال بعموميتها.

أود في الختام أن أشكر طلابي على مر الفصول ممن تحمَّلوا محاضراتي بصمت مشوب بالريبة، وممن كانت لهم مداخلات بين الحين والآخر. كما أشكر لزميلي الدكتور صالح السنوسي تفضُّله بقراءة أجزاء من مسودة الكتاب وملاحظاته المفيدة حولها. والله المستعان.

المؤلف

المحتويـات

الفصل الأول: فضاء الضرب الداخلي

الفصل الثاني: مسألة شتورم ـ ليوفيل

الفصل الخامس: دوال بيسل

الفصل السادس: تحويل فورير

الفصل السابع: تحويل لابلاس

الفصل الأول

فضاء الضرب الداخلي

فضاء الضرب الداخلي (inner product space) هو الإطار العام الذي سنعالج فيه مواضيع هذا الكتاب، فهو يوفر الحد الأدنى من البنية الرياضية اللازمة لصياغة المفاهيم والنتائج التي سنتطرق إليها. وهو في حقيقة الأمر التوسيع (أو التعميم) الطبيعي للفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ ذي الخواص الهندسية والتوبولوجية المعروفة.

(1.1) الفضاءات الخطية

سنستخدم الرمز $\mathbb{F}$ للدلالة على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو حقل الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

تعريف (1.1)

الفضاء الخطي (linear space)، أو **فضاء المتجهات** (vector space)، هو مجموعة X معرف عليها عملية جمع

$$+ : X \times X \to X$$

وعملية ضرب

$$\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$$

بحيث

(1) X زمرة إبدالية تحت عملية الجمع ، أي أن

(i) $x + y = y + x \quad \forall\, x,y \in X$

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + x \quad \forall\, x,y,z \in X$

(iii) يوجد $0 \in X$ (يسمى **المتجه الصفري**) بحيث

$$x + 0 = x \quad \forall\, x \in X$$

(iv) لكل $x \in X$ يوجد نظير جمعي $-x \in X$ بحيث

$$x + (-x) = 0$$

(2) تحقق عملية الضرب بين عناصر $\mathbb{F}$ وعناصر X الشرطين

(i) $a\cdot(b\cdot x) = (ab)\cdot x \quad \forall\, a,b \in \mathbb{F}, \forall\, x \in X$

(ii) $1\cdot x = x \quad \forall\, x \in X$

(3) تتحقق خاصتا التوزيع

(i) $a\cdot(x + y) = a\cdot x + a\cdot y \quad \forall\, a \in \mathbb{F}, \forall\, x,y \in X$

(ii) $(a + b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x \quad \forall\, a,b \in \mathbb{F}, \forall\, x \in X$

للتأكيد على دور الحقل $\mathbb{F}$ في هذا التعريف سنصف X بأنه فضاء خطي **فوق** $\mathbb{F}$ ، فإن كان $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ سمّي X **فضاءً خطيًّا حقيقيًّا**، وإن كان $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ سمّي **فضاءً خطيًّا مركبًا**. وتسمى عناصر X **متجهات**.

لاحظ أن المتجه الصفري المشار إليه في (iii) يختلف، بصفة عامة، عن صفر الحقل $\mathbb{F}$ وإن كنا سنستخدم الرمز 0 نفسه للدلالة على أي منهما، وسيكون واضحًا من السياق أيهما المقصود. وكما هي العادة سنختصر الرمز $a\cdot x$ لحاصل الضرب العددي (أي بين عناصر $\mathbb{F}$ و X) إلى ax.

مثـال (1.1)

(i) المجموعة

$$\mathbb{R}^n = \{x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

بعملية الجمع

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

وعملية الضرب

$$a\cdot(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$$

حيث $a \in \mathbb{R}$ ، تشكل فضاءً خطيًّا حقيقيًّا.

(ii) أما المجموعة

$$\mathbb{C}^n = \{z_1, \ldots, z_n) : z_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$$

بعملية الجمع

$$(z_1, \ldots, z_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (z_1 + w_1, \ldots, z_n + w_n)$$

وعملية الضرب

$$a \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (az_1, \ldots, az_n)$$

حيث $a \in \mathbb{C}$ ، فهي فضاء خطي مركب.

(iii) المجموعة $\mathbb{C}^n$ فوق الحقل $\mathbb{R}$ تشكل فضاءً خطيًّا حقيقيًّا.

(iv) مجموعة كثيرات الحدود $\mathcal{P}$ في المتغير الحقيقي x ذات المعاملات الحقيقية (المركبة) هي أيضا فضاء خطي حقيقي (مركب) بعملية الجمع المعتادة بين كثيرات الحدود وعملية الضرب العددي

$$b\cdot(a_n x^n + \cdots + a_0) = ba_n x^n + \cdots + ba_0$$

حيث b عدد حقيقي (مركب).

(v) مجموعة الدوال الحقيقية (المركبة) المتصلة على الفترة الحقيقية المحدودة والمغلقة [a,b]، والتي يرمز لها بـ C([a,b])، تشكل فضاءً خطيًّا حقيقيًّا

(مركبًا) بعملية الجمع المعتادة بين الدوال وعملية الضرب في عدد حقيقي (مركب).

افرض أن $\{x_1, \ldots, x_n\}$ أي مجموعة منتهية من المتجهات. يسمى المجموع $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ ، حيث $a_i \in \mathbb{F}$ لكل i ، **تركيبًا خطيًّا** من هذه المجموعة وتسمى الأعداد a_i **معاملات** التركيب الخطي.

تعريف (1.2)

(i) يقال عن مجموعة منتهية $\{x_1, \ldots, x_n\}$ من المتجهات إنها **مستقلة خطيًّا** إذا كان

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

أي إذا كان كل تركيب خطي من المتجهات $\{x_i\}$ يختلف عن الصفر إلا في حالة أن تكون المعاملات a_i جميعها أصفارًا. أما إذا وجد مجموعة $\{a_i\}$ من الأعداد، ليست كلها أصفارًا، بحيث $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ ، فإن المتجهات $\{x_1, \ldots, x_n\}$ تكون **مرتبطة خطيًّا**.

(ii) إذا كانت مجموعة المتجهات $\{x_1, x_2, \ldots\}$ غير منتهية فإنها تكون مستقلة خطيًّا إذا كانت كل مجموعة جزئية منتهية منها مستقلة خطيًّا. وتكون مرتبطة خطيًّا إذا لم تكن مستقلة خطيًّا، أي إذا وجد مجموعة جزئية منتهية من $\{x_i\}$ مرتبطة خطيًّا.

لاحظ أن أي مجموعة منتهية من المتجهات تكون مرتبطة خطيًّا إذا أمكن تمثيل أحدها بتركيب خطي من بقية عناصر المجموعة (تمرين (1.1.3)).

تعريف (1.3)

(i) تسمى المجموعة $\mathcal{B}$ من المتجهات في الفضاء الخطي X **أساسًا** (basis) للفضاء X إذا كانت $\mathcal{B}$ مستقلة خطيًّا وكان كل متجه في X هو تركيب خطي من عناصر $\mathcal{B}$. ويقال إن $\mathcal{B}$ **تولّد** (spans) X إذا كانت $\mathcal{B}$ أساسًا للفضاء X.

(ii) عندما تكون $\mathcal{B}$ مجموعة منتهية فإن عدد عناصرها يسمى **عدد أبعاد** الفضاء X، وفي حالة أن $\mathcal{B}$ غير منتهية يقال عن X إنه فضاء بعدد غير منته من الأبعاد.

(iii) تسمى المجموعة (غير الخالية) Y من عناصر الفضاء الخطي X **فضاءً خطيًّا جزئيًّا** (linear subspace) من X إذا كان لكل $x,y\in Y$ ولكل $a,b\in \mathbb{F}$ يظل التركيب الخطي $ax+by$ عنصرًا في Y.

في المثال (1.1) من الواضح أن متجهات الوحدة

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1)$$

تشكل أساسًا لكل من $\mathbb{R}^n$ فوق $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}^n$ فوق $\mathbb{C}$، كما أن المتجهات

$$d_1 = (i, 0, \dots, 0), \dots, d_n = (0, \dots, 0, i)$$

تشكل مع $e_1, \dots, e_n$ أساسًا للفضاء $\mathbb{C}^n$ فوق $\mathbb{R}$. ومن جهة أخرى، فإن قوى x

$$1, x, x^2, \dots$$

تولّد كثيرات الحدود $\mathcal{P}$. إذن عدد أبعاد كل من $\mathbb{R}^n$ الحقيقي و $\mathbb{C}^n$ المركب هو n، بينما عدد أبعاد $\mathbb{C}^n$ الحقيقي 2n. أما الفضاء $\mathcal{P}$ فهو غير منتهي الأبعاد.

سنستخدم الرمز $\mathcal{P}_n$ للدلالة على كثيرات الحدود من الدرجة n فما دون، وهي تشكل فضاءً جزئيًّا من $\mathcal{P}$ عدد أبعاده n+1. كما أن مجموعة الدوال المعرفة على [a,b] ذات المشتقات المتصلة، $C^1([a,b])$، هي الأخرى فضاء جزئي من $C([a,b])$. وبصفة عامة، إذا كانت $C^n([a,b])$ مجموعة الدوال المعرفة على [a,b] ذات المشتقات المتصلة من الرتبة n فما دون، فإن $C^n([a,b])$ تصبح فضاءً خطيًّا (حقيقيًّا أو مركبًا

بحسب اختيار الحقل $\mathbb{F}$) ويكون $C^m([a,b])$ فضـــاءً جزئيًّا من $C^n([a,b])$ لكل $m > n$.
واضح أن عدد أبعاد كـل من $C([a,b])$ و $C^n([a,b])$ ، حيث $n\geq 1$ ، غير منته لأنهما يشملان كثيرات الحدود على $[a,b]$.

(1.2) فضاء الضرب الداخلي

تعريف (1.4)

حاصل الضرب الداخلي (inner product) في الفضاء الخطي X ، المعرف فوق $\mathbb{F}$، هو تطبيق من $X\times X$ إلى $\mathbb{F}$ يعين لكل متجهين $x,y\in X$ حاصل ضربهما الداخلي $\langle x,y\rangle \in \mathbb{F}$ بحيث

$$\text{(i)}\ \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \quad \forall x,y \in X$$

$$\text{(ii)}\ \langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle \quad \forall a,b \in \mathbb{F}, \forall x,y,z \in X$$

$$\text{(iii)}\ \langle x,x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$$

$$\text{(iv)}\ \langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$$

لاحـظ أن $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ عندما يكـون X فضـاء حقيقيـا ، كمـا أن $\langle x,ay\rangle = \bar{a}\langle x,y\rangle$ مما يعني أن الخاصة الخطية (ii) المتوافرة في الخانـة الأولى من حاصل الضرب الداخلي لا تتوافر في الخانة الثانية (إلا عندما يكون الفضاء حقيقيًّا).

باستخدام حاصل الضرب الداخلي في X يعرَّف **قياس** (أو **طول**) المتجه x بأنه

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \geq 0$$

وبالنظر إلى (ii) و (iv) فإن $\|x\| = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$.

بهـذه البنيـة التوبولوجيـة المستمَدَّة من حاصل الضـرب الداخلي ، يصبح X فضـاء توبولـوجيًّا معـرفًا عليـه مفهـوم المسافة ، ويسمى **فضـاء ضـرب داخلـي** (inner product space).

مثـال (1.2)

(i) في $\mathbb{R}^n$ يعرَّف حاصل الضرب الداخلي بين المتجهين

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$$

بأنه

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \qquad (1.1)$$

فيكون قياس المتجه معرفًا بالصيغة

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \qquad (1.2)$$

ويسمى $\mathbb{R}^n$ عندئذ **فضاءً إقليديًا** (Euclidean space).

(ii) في $\mathbb{C}^n$ نعرِّف

$$\langle z, w\rangle = z_1 \overline{w}_1 + \cdots + z_n \overline{w}_n$$

$$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

(iii) في فضاء الدوال المتصلة على [a,b] نعرِّف

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \quad \forall f, g \in C([a,b]) \qquad (1.3)$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx} \qquad (1.4)$$

وبالإمكان التحقـق مـن توافـر الخـواص (i) ، (ii) ، (iii) و (iv) المذكـورة آنفًا في هذه التعريفات (انظر تمرين 1.1.13).

سيكـون محـط اهتمامنـا فـي هـذه الدراسـة فضـاء الـدوال المعـرف عليـه حـاصل الضرب الداخلي (1.3) ، وسـنجد أن هـذا التعريـف يضفـي علـى الفضـاء بنيـة هندسـية تمثـل امتـدادًا للهندسـة الإقليديـة المعروفـة فـي $\mathbb{R}^n$ بمـا فيهـا مـن مفـاهيم وعلاقـات ، كالتعامد والتوازي ومـا إلـى ذلـك. وسـنبدأ باسـترجاع مفـاهيم الهندسـة الإقليديـة التـي يهمنا تعميمها إلى C([a,b]).

في المتراجحة

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

ضع

$$a = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \quad , \; b = \frac{b_i}{\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}} \quad ,$$

حيث $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ لكل i، $\sum a_i^2 \neq 0$ ، $\sum b_i^2 \neq 0$ ، للحصول على

$$\frac{a_i b_i}{\sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}} \leq \frac{1}{2}\frac{a_i^2}{\sum a_i^2} + \frac{1}{2}\frac{b_i^2}{\sum b_i^2}$$

وبعد التجميع على i من 1 إلى n يتحول الطرف الأيمن من هذه المتراجحة إلى 1، ونحصل على العلاقة

$$\sum a_i b_i \leq \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2} \quad , \; a_i, b_i \in \mathbb{R} \qquad (1.5)$$

التي تعرف أحيانا **بمتراجحة كوشي** (Cauchy's inequality). لاحظ أن المتراجحة تتحول إلى مساواة عندما $\sum a_i^2 = 0$ أو $\sum b_i^2 = 0$.

بالنظر إلى التعريفين (1.1) و (1.2) نستطيع الآن أن نعيد كتابة (1.5) بالصورة

$$\langle x, y \rangle \leq ||x||\,||y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad (1.6)$$

التي تسمى **متراجحة شفارتز** (Schwarz inequality). تعرَّف الزاوية θ بين المتجهين x و y في $\mathbb{R}^n$ بأنها الزاوية التي تحقق المساواة

$$\langle x, y \rangle = ||x||\,||y|| \cos\theta \qquad (1.7)$$

بما يتفق مع مفهوم الزاوية في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$.

كما أن متراجحة شفارتز تقود إلى علاقة أخرى على درجة من الأهمية هي **متراجحة المثلث** (triangle inequality)

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad (1.8)$$

إذ أن

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\le (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

فنحصل على (1.8) باستخراج الجذر التربيعي للطرفين. ومتراجحة المثلث، كما هو معلوم، شرط لازم في أي تعريف لمفهوم المسافة.

إذا كان $x\neq 0$ و $y\neq 0$ في المعادلة (1.7) فإن

$$\langle x,y\rangle = 0 \iff \cos\theta = 0$$

وهو شرط التعامد بين المتجهين x و y في $\mathbb{R}^n$. وبناء عليه نقدم التعريف التالي.

تعريف (1.5)

(i) في فضاء الضرب الداخلي X يقال إن المتجهين x و y **متعامدان** (orthogonal) إذا كان $\langle x,y\rangle = 0$، ونعبر عن ذلك رمزًا بكتابة $x \perp y$، كما يقال إن المجموعة $\mathcal{V}$ من المتجهات في X **متعامدة** إذا كان كل متجهين في $\mathcal{V}$ متعامدين.

(ii) يقال عن المجموعة $\mathcal{V}$ المتعامدة في X إنها **متعامدة عياريًّا** (orthonormal) إذا كان $\|x\|=1$ لكل $x\in \mathcal{V}$.

من أبسط الأمثلة على المجموعة المتعامدة عياريًّا في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ متجهات الوحدة

$$\begin{aligned}e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, \dots, 0, 1)\end{aligned}$$

وهي تشكل أساسًا للفضاء $\mathbb{R}^n$ كما لاحظنا آنفًا.

بصفة عامة إذا كانت المتجهات

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

متعامدة في X، وكان $x_i \neq 0$ لكل i، فهي مستقلة خطيًّا. لنرى ذلك، نفترض أن

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \ , \ a_i \in \mathbb{R}$$

ثم نأخذ حاصل الضرب الداخلي لطرفي المعادلة مع x_k، فنحصل على

$$a_k \langle x_k, x_k \rangle = a_k \|x_k\|^2 = 0 \quad , \quad k = 1, \cdots, n$$

مما يعني أن $a_k=0$ لكل k. ومن المجموعة المتعامدة $\{x_i\}$، حيث $x_i \neq 0$، نستطيع أن نكوِّن المجموعة المتعامدة عياريا $\{x_i/\|x_i\|\}$ بقسمة كل متجه على قياسه.

نعود مرة أخرى إلى الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ ونفرض أن x أي متجه في $\mathbb{R}^n$، فهو إذن ممثَّل بتركيب خطي من عناصر الأساس $\{e_i\}$ على النحو

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \tag{1.9}$$

الآن، بأخذ حاصل الضرب الداخلي لطرفي المعادلة (1.9) مع e_k، وبالنظر إلى أن المجموعة $\{e_i\}$ متعامدة عياريًّا، فإن

$$\langle x, e_k \rangle = a_k \quad , \quad k=1, \dots, n$$

أي أن كل متجه $x \in \mathbb{R}^n$ ممثَّل بالصيغة

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

ولأسباب غير خافية فإن العدد $\langle x, e_i \rangle$ يسمى **إسقاط** x (projection) على e_i كما يسمى المتجه $\langle x, e_i \rangle e_i$ **مسقط** x في اتجاه e_i. وقياسا على ذلك، إذا كان x و y أي متجهين في فضاء الضرب الداخلي X بحيث $y \neq 0$، فإن $\langle x, y/\|y\| \rangle$ هو إسقاط x على y، بينما يمثل المتجه

$$\left\langle x, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \frac{y}{\|y\|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y$$

مسقط x في اتجاه y.

لنفرض الآن أن لدينا مجموعة من المتجهات المستقلة

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

في فضاء الضرب الداخلي X . هل يمكن تكوين مجموعة متعامدة منها؟ فيما يلي نقدم ما يعرف **بطريقة قرام ـ شميدت** (Gram-Schmidt) لتكوين المجموعة المتعامدة $\{y_1, \ldots, y_n\}$ بدلالة المجموعة $\{x_i\}$:

نختار المتجه الأول بأنه x_1

$$y_1 = x_1$$

ثم نعرف المتجه الثاني بأنه x_2 بعد أن نستخرج منه مسقط x_2 في اتجاه y_1، أي

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1$$

ونعرف المتجه الثالث بأنه x_3 بعد استخراج مسقطي x_3 في اتجاه y_1 و y_2

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\|y_2\|^2} y_2$$

وهكذا إلى أن نصل إلى المتجه الأخير

$$y_n = x_n - \frac{\langle x_n, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 - \cdots - \frac{\langle x_n, y_{n-1} \rangle}{\|y_{n-1}\|^2} y_{n-1}$$

وبإمكان القارىء أن يتحقق من أن المجموعة $\{y_i\}$ متعامدة.

تمارين (1.1)

(1) استخدم خواص الفضاء الخطي X فوق $\mathbb{F}$ لإثبات أن

(i) $0 \cdot x = 0$ لكل $x \in X$

(لاحظ أن 0 في الطرف الأيسر هو صفر الحقل $\mathbb{F}$ بينما 0 في الطرف الأيمن هو المتجه الصفري).

(ii) $a \cdot x = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (x = 0)$

(iii) $-x = (-1) \cdot x$

(2) فيما يلي عيِّن الفضاءات الخطية ونوعها:

(i) كثيرات الحدود من الدرجة n ذات المعاملات المركبة فوق الحقل $\mathbb{C}$.

(ii) كثيرات الحدودp ذات المعاملات التخيلية فوق الحقل $\mathbb{R}$.

(iii) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

(3) أثبت أن المتجهات $x_1, \ldots, x_n$ مرتبطة خطيا إذا (وفقط إذا) وجد $k \in \{1, \ldots, n\}$ بحيث

$$x_k = \sum_{\substack{1 \\ i \neq k}}^{n} a_i x_i \quad , \quad a_i \in \mathbb{F}$$

ثم استنتج أن أي مجموعة $\{x_i\}$ من المتجهات (سواء كانت منتهية أم لا) مرتبطة خطيًّا إذا أمكن التعبير عن أحدها بتركيب خطي من مجموعة جزئية منتهية من بقيَّتها.

(4) أثبت أن المتجهات

$$x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1n})$$
$$\vdots$$
$$x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nn})$$

حيث $x_{ij} \in \mathbb{R}$ لكل i و j مرتبطة خطيًّا إذا وفقط إذا كانت المحددة $\det(x_{ij})$ تساوي الصفر.

(5) أثبت أن المتجهين x و y في فضاء الضرب الداخلي الحقيقي متعامدان إذا وفقط إذا كان

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

هل هذه العبارة صحيحة عندما يكون الفضاء مركبا؟

(6) افرض أن x و y متجهان في فضاء حاصل الضرب الداخلي X وأن $||x||=||y||$. أثبت أن $x-y$ عمودي على $x+y$ إذا كان الفضاء X حقيقيا.

(7) افرض أن $\varphi_1(x)=1$ ، $\varphi_2(x)=x$ ، $\varphi_3(x)=x^2$ على الفترة $[-1,1]$. استخدم العلاقة (1.3) لإيجاد

(i) $\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$ (ii) $\langle\varphi_1,\varphi_3\rangle$

(iii) $||\varphi_1-\varphi_2||^2$ (iv) $||2\varphi_1+3\varphi_2||$

(8) عين الدوال المتعامدة في $C([0,1])$ من بين الدوال التالية

$$\varphi_1(x)=1,\ \varphi_2(x)=x,\ \varphi_3(x)=\sin 2\pi x,\ \varphi_4(x)=\cos 2\pi x$$

(9) احسب مسقط الدالة $f(x)=\cos^2 x$ في $C([-\pi,\pi])$ على كل من الدوال

$$f_1(x)=1,\ f_2(x)=\cos x,\ f_3(x)=\cos 2x,\ -\pi\le x\le\pi$$

(10) تحقق من أن الدوال φ_1 ، φ_2 ، φ_3 في تمرين (7) مستقلة خطيًّا ثم استخرج منها مجموعة متعامدة باستخدام طريقة قرام ـ شميدت.

(11) حول مجموعة الدوال المتعامدة في تمرين (10) إلى مجموعة متعامدة عياريًّا.

(12) أثبت أن المجموعة $\{1,x,|x|\}$ مستقلة خطيًّا في $C([-1,1])$ ثم كوِّن منها مجموعة متعامدة عياريًّا. هل المجموعة مستقلة خطيا في $C([0,1])$؟

(13) أثبت أن مجموعة الدوال $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ مرتبطة خطيًّا في $C^{n-1}([a,b])$ إذا وفقط إذا كان $\det(f_j^{(i)})=0$ على $[a,b]$ حيث $0\le i\le n-1$ ، $1\le j\le n$.

(14) تحقق من تعامد مجموعة الدوال التالية على $[-1,1]$

$$\varphi_1(x)=1,\ \varphi_2(x)=x^2-\frac{1}{3},\ \varphi_3=\frac{x}{|x|}\quad \forall x\neq 0,\ \varphi_3(0)=0$$

ثم استخرج منها مجموعة متعامدة عياريًّا.

(15) حدد قيم a ، b ، c لكي تصبح الدالة x^2+bx+c عمودية على كل من الدالتين $x+1$ و $x-1$ على الفترة $[0,1]$.

(16) أثبت أن $||f||=0$ إذا وفقط إذا كان $f=0$ لكل $f\in C([a,b])$، ثم أعط مثالا لدالة معرفة على $[a,b]$ بحيث $||f||=0$ ولكن f ليست الدالة الصفرية.

(1.3) فضاء الدوال $\mathcal{L}^2$

في فضاء الدوال المركبة المتصلة على $[a,b]$ سبق أن عرفنا حاصل الضرب الداخلي بين الدالتين f و g بأنه

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)dx \tag{1.10}$$

ومنه قياس الدالة f

$$||f||= \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx} \tag{1.11}$$

والآن سنثبت صحة متراجحتي شفارتز (1.6) والمثلث (1.8) في فضاء الضرب الداخلي $C([a,b])$. لأي $f,g\in C([a,b])$ لدينا

$$\left\|\frac{|f|}{||f||}-\frac{|g|}{||g||}\right\|^2 = \int_a^b\left[\frac{|f(x)|}{||f||}-\frac{|g(x)|}{||g||}\right]^2 dx \geq 0$$

حيث نفترض أن $||f||\neq 0$ و $||g||\neq 0$. فنحصل من ذلك على

$$\int_a^b \frac{|f(x)|}{||f||}\cdot\frac{|g(x)|}{||g||}dx \leq \frac{1}{2||f||^2}\int_a^b |f|^2(x)dx + \frac{1}{2||g||^2}\int_a^b |g|^2(x)dx = 1$$

$$\Rightarrow |\langle f,g\rangle| \leq \langle |f|,|g|\rangle \leq ||f||\,||g|| \tag{1.12}$$

وإذا كان $||f||=0$ أو $||g||=0$ فإن هذه المتراجحة تتحول إلى مساواة. أما إذا كانت الدالتان f و g حقيقيتين فإن متراجحة شفارتز تأخذ الصورة

$$\langle f\,,\,g\rangle \leq |\langle f\,,\,g\rangle| \leq ||f||\,||g||$$

ومن جهة أخرى فإن

$$\begin{aligned}||f+g||^2 &= \langle f+g, f+g\rangle\\ &=||f||^2+2\,\mathrm{Re}\langle f,g\rangle+||g||^2\\ &\leq||f||^2+2||f||\,||g||+||g_2||^2\\ &=(||f||+||g||)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow ||f+g|| < ||f|| + ||g|| \tag{1.13}$$

حيث استفدنا من متراجحة شفارتز (1.12) في الحصول على متراجحة المثلث (1.13).

استنادا إلى التعريف (1.11) لقياس الدالة والعلاقة (1.13) نستطيع الآن أن نتحدث عن "المسافة" بين الدالتين f و g في $C([a,b])$ على أنها $||f-g||$، فنستنتج أن $||f-g||=0$ إذا وفقط إذا كان $f=g$ على $[a,b]$ (تمرين 1.1.16)، وهذا من مزايا التعامل مع فضاء الدوال المتصلة. إذ من المعلوم أننا لو سمحنا لإحدى الدالتين f و g (أو كليهما) بأن تكون غير متصلة، فإن المساواة $||f-g||=0$ قد تتحقق دون أن تكون $f(x)=g(x)$ لجميع قيم x.

ومع ذلك فإن $C([a,b])$ ليس الفضاء المناسب لأغراض هذه الدراسة لأنه ليس مغلقا بالنسبة لعملية أخذ النهاية، كما سيتضح في البند (1.4). لكننا في الوقت ذاته لا نستطيع أن نوسّع $C([a,b])$ بإضافة جميع الدوال غير المتصلة على $[a,b]$، بل نريد أن نتعامل مع تلك الدوال $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ التي تحقق

$$||f||= \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} < \infty \tag{1.14}$$

أي التي مربعاتها قابلة للمكاملة على $[a,b]$، لأن في ذلك ضمانا لوجود حاصل الضرب الداخلي $\langle f,g\rangle$ بين أي دالتين بموجب متراجحة شفارتز. هذه العبارة الأخيرة ليست في حقيقة الأمر صحيحة إلا إذا اعتبرنا التكامل على طريقة لبيق، لكننا لأغراض هذه الدراسة سنكتفي باعتبار التكامل على طريقة ريمان (بما في ذلك التكاملات المعتلّة) لأن الاختلاف بينهما لا يظهر مع الدوال التي سنتطرق إليها.

سنستخدم الرمز $\mathcal{L}^2(a,b)$ للدلالة على مجموعة الدوال f الحقيقية المعرفة على الفترة $[a,b]$ بحيث $\int_a^b f^2(x)dx < \infty$، معرف عليها حاصل الضرب الداخلي (1.10) والقياس (1.11). واضح أن $\mathcal{L}^2(a,b)$ فضاء خطي لأن

$$||\alpha f+\beta g|| \le ||\alpha f||+||\beta g|| = |\alpha|\ ||f||+|\beta|\ ||g|| \quad \forall f,g\in \mathcal{L}^2(a,b),\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

مما يعـــني أن $\alpha f+\beta g\in \mathcal{L}^2(a,b)$. لكن المســـاواة $||f||=0$ لا تعـني أن $f(x)=0$ لكل $x\in[a,b]$، فعلى سبيل المثال قد تكون $f(x)=0$ على الفترة $[a,b]$ باستثناء عدد منته من نقاطها. سنعتبر كل دالة f تحقق $||f||=0$ ممثّلة للدالة الصفرية في $\mathcal{L}^2(a,b)$ ولن نميِّز بين دالتين $f,g\in \mathcal{L}^2(a,b)$ إذا كان $||f-g||=0$.* وسنميز بين المساواة النقطية $f(x)=g(x)$ على $[a,b]$ والمساواة في $\mathcal{L}^2(a,b)$ بكتابة $f(x) \doteq g(x)$ للدلالة على النوع الثاني، أي أن

$$f \doteq g \Leftrightarrow ||f-g||=0$$

وبالمثـــل يعـرف فضاء الضرب الداخلي المركـب $\mathcal{L}^2(a,b)$ بأنه مكـون من الدوال المركبة (في متغير حقيقي) بحيث $\int_a^b|f(x)|^2\,dx<\infty$، معـرف عليه حـاصل الضرب الداخلي

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

والقياس

$$||f||=\sqrt{\int_a^b|f(x)|^2\,dx}$$

بحيث تتحقق متراجحة شفارتز

$$|\langle f,g\rangle|\le||f||\,||g|| \quad \forall f,g\in\mathcal{L}^2(a,b) \tag{1.15}$$

سنستخدم الرمز $\mathcal{L}^2(a,b)$ إذن للدلالة على فضاء الضرب الداخلي (الحقيقي أو المركب) سواء كانت عناصر الفضاء من الدوال المعرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ أم المفتوحة (a,b)، لأن الدالة القابلة للتكامل على إحداهما تكون قابلة للتكامل على الأخرى. كما سنسمح أحيانا للفترة بأن تكون غير محدودة عند أحد طرفيها أو كليهما فنحصل بذلك على $\mathcal{L}^2(a,\infty)$، $\mathcal{L}^2(-\infty,b)$ أو $\mathcal{L}^2(-\infty,\infty)=\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. وسنكتب مجرد $\mathcal{L}^2$ عندما تكون الفترة غير ذات أهمية أو غير محددة.

---

* بعبارة أدق يمكن اعتبار عناصر $\mathcal{L}^2(a,b)$ أصناف تكافؤ من الدوال تحددها العلاقة $f \doteq g \Leftrightarrow ||f-g||=0$.

مثـال (1.3)

حدد الدوال التي تنتمي إلى $\mathcal{L}^2$ واحسب قياس كل منها :

$$\text{(i)}\quad f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1/2\\ 0 & 1/2<x\le 1\end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad f(x)=1/\sqrt{x}\ ,\ 0<x<1$$

$$\text{(iii)}\quad f(x)=1/\sqrt[3]{x}\ ,\ 0<x<1$$

$$\text{(iv)}\quad f(x)=1/x\ ,\ 1<x<\infty$$

الحـــل

$$\text{(i)}\quad \int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^{1/2}dx=1/2\ ,\ \|f\|=1/\sqrt{2}$$

$$\text{(ii)}\quad \int_0^1 \frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\log\varepsilon$$
$$=\infty$$
$$\Rightarrow f\notin \mathcal{L}^2(0,1)$$

$$\text{(iii)}\quad \int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}3(1-\varepsilon^{1/3})=3$$
$$\|f\|=\sqrt{3}$$

$$\text{(iv)}\quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx=1\ ,\ \|f\|=1$$

مثـال (1.4)

مجموعة الدوال $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ متعامـــدة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ لأن

$$\langle 1,\cos nx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\langle 1,\sin nx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\langle \cos nx, \cos mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x + \cos(n+m)x]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0 \quad , \quad n \neq m$$
$$\langle \sin nx, \sin mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]dx$$
$$= 0 \quad , \quad n \neq m$$
$$\langle \cos nx, \sin mx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin\ (n+m)x - \sin(n-m)x]dx$$
$$= 0 \quad , \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}$$

ويما أن

$$||1|| = \sqrt{2\pi}$$
$$||\cos nx|| = \left[\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx\right]^{1/2} = \sqrt{\pi}$$
$$||\sin nx|| = \left[\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx dx\right]^{1/2} = \sqrt{\pi}$$

فإن المجموعة $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$ متعامدة عياريًا.

مثـال (1.5)

مجمـوعـة الـدوال $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ متعامـدة في فضاء الضرب الداخلي $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ المركب، إذ أن

$$\left\langle e^{inx},e^{imx}\right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\ \overline{e^{imx}}dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\ e^{-imx}dx$$
$$= \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} \quad , \ n \neq m$$
$$= \frac{1}{i(n-m)} [\cos(n-m)x + i\sin(n-m)x]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0$$

كما أن

$$\|e^{inx}\| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\ e^{-inx}dx\right]^{1/2} = \sqrt{2\pi}$$

مما يعـــــني أن المجموعة $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ متعامدة عياريًّا في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ المركب.

تمارين (1.2)

(1) تحقــق من تطابق متراجحة شفارتز ومتراجحة المثلـث علـى الدالتيـن $f(x)=1$ و $g(x)=x$ حيث $0 \le x \le 1$.

(2) حدد الدوال التي تنتمي للفضاء $\mathcal{L}^2(0,\infty)$ واحسب قياس كل منها :

$\sin x$ (i) $\qquad \frac{1}{1+x}$ (ii) $\qquad e^{-x}$ (iii) $\qquad 1/\sqrt[3]{x}$ (iv)

(3) متى تتحقق المساواة $\langle f,g\rangle = \|f\|\,\|g\|$ في $\mathcal{L}^2(a,b)$ ؟

(4) متى تتحقق المساواة $\|f+g\| = \|f\|+\|g\|$ في $\mathcal{L}^2(a,b)$ ؟

(5) عين قيم α الحقيقية التي تجعل $x^{\alpha} \in \mathcal{L}^2(0,1)$.

(6) عين قيم α الحقيقية التي تجعل $x^{\alpha} \in \mathcal{L}^2(1,\infty)$.

(7) إذا كانت الدالة f متصلة على $[0,\infty)$ وتنتمي للفضاء $\mathcal{L}^2(0,\infty)$ فأثبت أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(8) أثبت أن كلّ دالة في $\mathcal{L}^2(a,b)$ ، حيث $-\infty < a < b < \infty$، قابلة للتكامل على (a,b). أثبت أن العكس غير صحيح بإعطاء مثال لدالة قابلة للتكامل على (a,b) لكنها لا تنتمي إلى $\mathcal{L}^2(a,b)$.

(9) إذا كانت الدالة f محدودة وقابلة للتكامل على $[0,\infty)$ فأثبت أنها تقع في $\mathcal{L}^2(0,\infty)$. أثبت أن العكس غير صحيح بإعطاء مثال لدالة محدودة في $\mathcal{L}^2(0,\infty)$ لكنها غير قابلة للتكامل على $[0, \infty)$.

(10) عبر عن الدالة $\sin^3 x$ في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ بدلالة الدوال المتعامدة $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...\}$.

(1.4) متتاليات الدوال وتقاربها

لنفرض أن لكل $n\in\mathbb{N}$ هناك دالة (حقيقية أو مركبة) f_n معرفة على الفترة الحقيقية I. نقول عندئذ إن لدينا متتالية من الدوال f_n المعرفة على I. إذا كانت متتالية الأعداد $f_n(x)$ متقاربة عند كل نقطة x في I، وكان

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

قيل إن المتتالية f_n **متقاربة نقطيًّا** (pointwise convergent) من f ، وإن الدالة f المعرفة على I هي النهاية (النقطية) للمتتالية f_n. نعبر عن ذلك اختصارا بكتابة

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

أو $\lim f_n = f$

أو $f_n \to f$

لاحظ أن هذا التعريف **للتقارب النقطي** $f_n \to f$ يعني أن لكل $\varepsilon>0$ ولكل $x\in I$ يوجد عدد طبيعي N بحيث

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon \tag{1.16}$$

وأن العدد N يعتمد على النقطة x كما يعتمد على العدد الموجب ε. وفيما يلي بعض الأمثلة على هذا النوع من التقارب.

مثال (1.6)

(i) $$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx \to f(x) = 0$$

(ii) $$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^n \to f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

(iii) $$\forall x \in [0,\infty),\ f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \to f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

مثال (1.7)

لكل $n\in\mathbb{N}$ نعرف متتالية الدوال f_n على $[0,1]$ بالقاعدة

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ n & , \quad 0 < x \leq 1/n \\ 0 & , \quad 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

ونلاحظ أن $f_n(0)=0$ لكل $n\in\mathbb{N}$، كما أن لكل $x>0$ يوجد N بحيث $1/N < x$.
إذن

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < x \Rightarrow f_n(x) = 0$$

فنستنتج أن $f_n \to 0$ على الفترة $[0,1]$.

أما إذا كان العـدد N في الاقتضـاء (1.16) لا يعتمـد علـى النقطـة x، أي إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي N بحيث

$$n\geq N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in I \qquad (1.17)$$

فإن التقارب $f_n\to f$ يكون **منتظما** (uniform) ونميزه عـن التقـارب النقطـي بكتابـة $f_n \xrightarrow{u} f$.

ومـن الأمثلـة علـى التقـارب المنتظـم مثـال ((1.6(i)) أعـلاه، حيـث $\frac{1}{n}\sin nx \xrightarrow{u} 0$، لأن

$$|f_n(x)-0|=|\frac{1}{n}\sin nx|\leq \frac{1}{n} \quad \forall x\in \mathbb{R}$$

وبإمكاننـا تحقيـق المتراجحـة $|f_n(x)|<\varepsilon$ علـى الفـترة [0,1] بكاملهـا إذا اخترنـا $n>1/\varepsilon$، أي إذا كان العدد N في الاقتضاء (1.17) يزيد عن $1/\varepsilon$.

أمـا التقـارب $x^n\to 0$ على [0,1) فـي مثـال ((1.6(ii)) فهـو غـير منتظـم لأن الاقتضاء

$$n\geq N \Rightarrow |x^n-0| = x^n<\varepsilon$$

لا يتحقـق على الفـترة [0,1) بكاملـها إذا كانت $0<\varepsilon<1$، وإنما علـى الفـترة الجزئية $[0,\sqrt[n]{\varepsilon})$، إذ أن $x^n\geq\varepsilon$ لكل $x\in[\sqrt[n]{\varepsilon},1]$.

كما أن التقارب $\frac{nx}{1+nx}\to 1$ على $(0,\infty)$ ليس منتظمًا لأن المتراجحة

$$\left|\frac{nx}{1+nx}-1\right|=\frac{1}{1+nx}<\varepsilon$$

حيث $0<\varepsilon<1$ لا تتحقق لأي من قيم x في الفترة $(0,(1-\varepsilon)/n\varepsilon]$ مهما اخترنا n.

لاحظ أن التقـارب المنتظـم $f_n \xrightarrow{u} f$ يقتضـي التقـارب النقطـي $f_n\to f$ ولكـن العكس غير صحيح، ولذلك فالدالة المرشحة لأن تكون نهاية منتظمة للمتتالية f_n هي النهاية النقطية لهذه المتتالية.

إذا كانت f_n متتالية معرفة على الفترة I ، فمن الواضح أن

$$f_n \to f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in I$$

كما أن

$$f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \qquad (1.18)$$

وذلك بالرجوع إلى تعريف التقارب المنتظم.

تتمتع الدوال f_n أحيانا بصفات خاصة ، مثل الاتصال أو قابلية الاشتقاق أو قابلية التكامل ، ويهمنا أن نعرف تأثير أخذ النهاية على هذه الصفات. فعلى سبيل المثال ، إذا كانت f_n دالة متصلة لكل n فهل $\lim_{n\to\infty} f_n$ أيضا دالة متصلة؟ سنجد الإجابة على ذلك في النظرية التالية ، وبإمكان القارىء الاطلاع على برهانها في المرجع [2].

نظرية (1.1)

لتكن f_n متتالية من الدوال المعرفة على الفترة I والمتقاربة نقطيًّا من f على I.

(i) إذا كانت f_n متصلة لكل n وكان التقارب $f_n \to f$ منتظمًا فإن f دالة متصلة على I.

(ii) إذا كانت f_n قابلة للتكامل على الفترة المحدودة I لكل n وكان $f_n \xrightarrow{u} f$ فإن f قابلة للتكامل على I ، كما أن $\int_I f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx$.

(iii) إذا كانت f_n قابلة للاشتقاق على I لكل n ، وكانت المتتالية f_n' متقاربة بانتظام على I ، فإن f_n متقاربة بانتظام من f ، كما أن f قابلة للاشتقاق وتحقق $f_n' \xrightarrow{u} f'$ على I.

بالرجوع إلى مثال (1.6) نلاحظ أن التقارب المنتظم $\frac{1}{n}\sin nx \xrightarrow{u} 0$ يحقق الفقرة (i) من النظرية كما يحقق الفقرة (ii) لأن $\frac{1}{n}\sin nx$ قابلة للتكامل على أي فترة محدودة من $\mathbb{R}$. لكن شروط الفقرة (iii) لا تتحقق لأن $\frac{d}{dx}(\frac{1}{n}\sin nx) = \cos nx$ غير متقاربة عند بعض قيم x مثل $x=\pi$ حيث $\cos n\pi=(-1)^n$. أما المتتالية x^n في الفقرة (ii) من المثال المذكور فعناصرها متصلة ولكن نهايتها غير متصلة (عند $x=1$) لأن تقاربها غير منتظم. وهذه الملاحظة الأخيرة تنطبق أيضا على المتتالية $\frac{nx}{1+nx}$.

في المثال (1.7) نجد أن

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{1/n} ndx = 1 \quad \forall n$$

أي أن $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$ بينما $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$ ، مما يدل على أن التقارب $f_n\to 0$ ليس منتظمًا، وهذا واضح من أن $\sup_{0\le x\le 1} f_n(x) = n$.

من جهة أخرى فإن

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n dx = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} x^n dx$$

مع أن التقارب $x^n\to 0$ ليس منتظما على $[0,1]$، مما يدل على أن الشروط المنصوص عليها في نظرية (1.1) شروط كافية وليست لازمة.

إذا كانت f_k متتالية من الدوال المعرفة على I فإن المتسلسلة غير المنتهية $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ تعرف بأنها نهاية متتالية المجاميع الجزئية $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ ، أي أن

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

حيثما وجدت هذه النهاية. سنفترض وجود النهاية $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ على I، ونطبق النظرية (1.1) على المتتالية S_n المتقاربة نقطيا على I من $S = \sum_1^\infty f_k$ للحصول على:

نتيجة (1.1.1)

(i) إذا كانت f_k متصلة على I لكل k (مما يعني أن S_n متصلة لكل n) وكان التقارب $S_n \to S$ منتظما، فإن المتسلسلة $S = \sum_1^\infty f_k$ أيضا متصلة على I.

(ii) إذا كانت f_k قابلة للتكامل على I لكل k وكان التقارب $S_n \to S$ منتظما، فإن المتسلسلة $S = \sum_1^\infty f_k$ أيضا قابلة للتكامل على I، ولدينا

$$\int_I \sum_1^\infty f_k = \sum_1^\infty \int_I f_k$$

(iii) إذا كانت f_k قابلة للاشتقاق على I لكل k، وكانت المتتالية $S'_n = \sum_1^n f_k'$ متقاربة بانتظام على I، فإن $S_n \xrightarrow{u} S$، كما أن $S = \sum_1^\infty f_k$ قابلة للاشتقاق على I وتحقق

$$\left(\sum_1^\infty f_k\right)' = \sum_1^\infty f_k'$$

يتضح من ذلك أن التقارب المنتظم للمتسلسلة غير المنتهية يتيح مجالا أوسع لإجراء بعض العمليات على المتسلسلة عن طريق اختراق حاجز التجميع وإجراء العملية على حدود المتسلسلة. وهناك اختبار مفيد يعطي شروطًا كافية (وليست لازمة) لضمان هذا النوع من التقارب.

نظرية (1.2) (اختبار فايرشتراس Weierstrass)

لتكن f_n متتالية من الدوال المعرفة I، ولتكن M_n متتالية من الأعداد الموجبة بحيث

$$|f_n(x)| \le M_n \quad \forall\, x \in I,\ n \in \mathbb{N}$$

إذا كانت المتسلسلة $\sum_1^\infty M_n$ متقاربة فإن $\sum_1^\infty f_n$ متقاربة بانتظام على I.

البرهــــان

افرض أن $\varepsilon>0$. لدينا

$$\left|\sum_1^{\infty} f_k(x) - \sum_1^{n} f_k\right| \le \sum_{n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{n+1}^{\infty} M_k \quad \forall x \in I, n \in \mathbb{N}$$

بما أن $\sum_1^{\infty} M_n$ متقاربة فإن هناك N بحيث

$$n \ge N \Rightarrow \sum_{n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \left|\sum_1^{\infty} f_k(x) - \sum_1^{n} f_k(x)\right| < \infty \quad \forall x \in I$$

فنستنتج ، بناء على التعريف ، أن المتسلسلة $\sum_1^{\infty} f_k$ متقاربة بانتظام. □

ملحوظة : يقال إن المتسلسلة $\sum_1^{\infty} f_n$ متقاربة مطلقًا (absolutely convergent) إذا كانت المتسلسلة $\sum_1^{\infty} |f_n|$ متقاربة ، وعلى ذلك فإن شروط النظرية (1.2) تضمن أن تقارب المتسلسلة $\sum_1^{\infty} f_n$ مطلق بالإضافة إلى أنه منتظم.

مثـال (1.8)

(i) المتسلسلة $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ لأن

$$\left|\frac{1}{n^2} \sin nx\right| \le \frac{1}{n^2}$$

والمتسلسلة $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة. وبما أن $\frac{1}{n^2} \sin nx$ متصلة لكل n فإن $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx$ تمثل دالة متصلة على $\mathbb{R}$. كما أن

$$\int\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx\right) dx = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \int \sin nx dx$$
$$= -\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos nx$$

أما متسلسلة المشتقات

$$\sum_1^\infty \frac{d}{dx}(\frac{1}{n^2}\sin nx) = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\cos nx$$

فليست متقاربة بانتظام ، بل إنها غير متقاربة عند بعض قيم x ، مثل $x=0$ ، حيث تصبح $\sum_1^\infty 1/n = \infty$ ، ولذلك لا نستطيع أن نكتب

$$\frac{d}{dx}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\sin nx = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\cos nx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(ii) المتسلسلة $\sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\sin nx$ متقاربة بانتظام (باختبار فايرشتراس) كما أن

$$\sum_1^\infty \frac{d}{dx}(\frac{1}{n^3}\sin nx) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\cos nx$$

متقاربة بانتظام ، وبالتالي فإن المساواة

$$\frac{d}{dx}\sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\sin nx = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\cos nx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

صحيحة.

تمارين (1.3)

(1) احسب النهاية النقطية حيثما وجدت لكل من المتتاليات :

(i) $\frac{x^n}{1+x^n}$ حيث $x\in\mathbb{R}$ (ii) $\sqrt[n]{x}$ حيث $0\leq x<\infty$

(iii) $\sin nx$ حيث $x\in\mathbb{R}$.

(2) حدد نوع التقارب لكل من المتتاليات

(i) $\frac{x^n}{1+x^n}$ حيث $0 \leq x \leq 2$ (ii) $\sqrt[n]{x}$ حيث $0 < x \leq 1$

(3) حدد نوع التقارب للمتتالية

$$f_n(x)=\begin{cases} nx\,, & 0\le x<1/n \\ 1\,, & 1/n\le x\le 1 \end{cases}$$

ثم قرر ما إذا كانت المساواة التالية صحيحة أم لا

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

(4) احسب نهاية المتتالية

$$f_n(x)=\begin{cases} nx\,, & 0\le x\le 1/n \\ \\ \dfrac{n}{n-1}(1-x)\,, & 1/n<x\le 1 \end{cases}$$

وحدد نوع التقارب على $[0,1]$.

(5) احسب نهاية المتتالية $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$ على $[0,1]$ وحدد نوع التقارب.

(6) أثبت أن التقارب $\dfrac{x}{x+n}\to 0$ منتظم على $[0,a]$ لأي $a>0$ وغير منتظم على $[0,\infty)$.

(7) افرض أن $f_n(x)=\begin{cases} 1/n & |x|\le n \\ 0 & |x|>n \end{cases}$ واستنتج أن $f_n \xrightarrow{u} 0$.

احسب $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ وبين لماذا لا تساوي 0 حسب النظرية (1.1).

(8) عين مجال التقارب ونوعه للمتسلسلة $\sum_1^\infty f_n$ ، حيث

(i) $f_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2}$ (ii) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$

(9) إذا كانت $\sum_1^\infty a_n$ متقارية مطلقا فأثبت أن $\sum_1^\infty a_n \sin nx$ متقارية بانتظام على $\mathbb{R}$.

(10) أثبت أن

$$A_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \to 0$$

عندما $n\to\infty$ ، ثم استخدم ذلك لاستنتاج أن التكامل المعتل $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ موجود. هل التكامل $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ أيضا موجود؟

(11) تسمى المتسلسلة

$$\sum_0^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

متسلسلة قوى (power series)، ومن المعلوم (انظر [2]) أنها متقاربة في $(-R,R)$ ومتباعدة خارج $[-R,R]$، حيث

$$R = \left[\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right]^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \geq 0$$

إذا كان $R>0$ استخدم اختبار فايرشتراس لإثبات أن متسلسلة القوى متقاربة بانتظام على $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ حيث ε أي عدد موجب (أقل من R).

(12) استنتج من التمرين (11) أن متسلسلة القوى $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ دالة متصلة على $(-R,R)$، ثم أثبت أنها قابلة للاشتقاق على $(-R,R)$، حيث $f'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^n$.

(13) استنتج من التمرين (12) أن متسلسلة القوى $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ قابلة للاشتقاق أي عدد من المرات على $(-R,R)$ وأن

$$a_n = f^{(n)}(0)/n! \quad \forall n = 0,1,2,\ldots$$

(14) استخدم نتيجة التمرين (13) لإيجاد متسلسلات القوى (متسلسلات تيلور) التي تمثل الدوال الأسية والمثلثية

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

على $\mathbb{R}$ ، ومن ثم استنتج علاقة أويلر (Euler) الشهيرة

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

حيث $i = \sqrt{-1}$.

(1.5) التقارب في $\mathcal{L}^2$

تعريف (1.6)

نقول عن متتالية الدوال $f_n \in \mathcal{L}^2(a,b)$ إنها **متقاربة** في $\mathcal{L}^2$ إذا كان هناك دالة $f \in \mathcal{L}^2(a,b)$ بحيث

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

أي إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد N بحيث

$$n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$$

ونعبر عن ذلك رمزا بكتابة $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ ، ونسمي f **نهاية** f_n في $\mathcal{L}^2(a,b)$.

مثـال (1.9)

(i) في مثال (1.6) وجدنا أن $x^n \to 0$ نقطيا، فهل $x^n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0$ ؟

$$\|x^n - 0\|^2 = \int_0^1 x^{2n} dx$$
$$= \frac{1}{2n+1} \to 0$$

نعم إن $x^n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0$.

(ii) كذلك وجدنا في مثال (1.7) أن $f_n \to 0$ نقطيا، حيث

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ n & , \quad 0 < x \le 1/n \\ 0 & , \quad 1/n < x \le 1 \end{cases}$$

وسننظر الآن في صحة هذا التقارب في $\mathcal{L}^2$.

$$\|f_n - 0\|^2 = \int_0^{1/n} n^2 dx = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \|f_n - 0\| \not\to 0$$

مما يعني أن متتالية الدوال f_n غير متقاربة من 0 في $\mathcal{L}^2(0,1)$.

يـدل هـذا المثـال علـى أن التقـارب النقطـي $f_n \to f$ لا يقتضـي التقـارب $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ ، ولكن يظل السؤال: إذا كانت المتتالية f_n متقاربة نقطيـا مـن دالـة مـا $f \in \mathcal{L}^2$ ولكن $f_n \not\xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ فهل يمكن أن تكون f_n متقاربـة في $\mathcal{L}^2$ (أي من دالة أخرى)؟ والإجابة بالنفي، فإذا تحقق التقارب النقطي للمتتالية $f_n \to f$ فإن التقارب في $\mathcal{L}^2$ ، إن وجـد، فسيكـون من نهاية f_n النقطية f. وعندئذ يصبح اختبار التقارب في $\mathcal{L}^2$ اختبارًا لصحة المساواة

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

ولكن، من جهة أخرى، قد تكون المتتالية f_n متقاربة في $\mathcal{L}^2$ دون أن تكون متقاربة نقطيا، وسنرى مثالا على ذلك في نهاية هذا البند. هناك، على أية حال، وسيلة لاختبار التقارب في $\mathcal{L}^2$ دون التطرق إلى التقارب النقطي، وذلك بتطبيق معيار كوشي كما سنعرض في نظرية (1.3).

خلاصة القول أن ليس هناك علاقة اقتضاء بين التقارب النقطي للمتتالية والتقارب في $\mathcal{L}^2$، ولكن في حالة تحقق هذين النوعين من التقارب فإن النهاية واحدة (في $\mathcal{L}^2$). أما التقارب المنتظم $f_n \xrightarrow{u} f$ فهو يقتضي التقارب النقطي كما أسلفنا، وسنرى الآن أنه يقتضي التقارب $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ أيضا إن كانت كل من الدوال f_n و f في $\mathcal{L}^2(I)$ والفترة I محدودة.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \int_I |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \\
&= \int_I \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

حيث تستند المساواة الثانية إلى الفقرة (ii) من النظرية (1.1).

بناء على التعريف (1.6) للتقارب في $\mathcal{L}^2$ فإن المتسلسلة $\sum_1^\infty f_k$، حيث $f_k \in \mathcal{L}^2$، متقاربة في $\mathcal{L}^2$ إذا كان هناك دالة $f \in \mathcal{L}^2$ بحيث $\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_1^n f_k\| = 0$.

مثال (1.10)

في مثال (1.8) وجدنا أن

$$S_n(x)=\sum_1^n \frac{1}{k^2}\sin kx \xrightarrow{u} S(x)=\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}\sin kx$$

فالدالة $S(x)$ إذن متصلة على الفترة $[-\pi,\pi]$ ، كما أن $S\in\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ ، وعلى ذلك فإن

$$\sum_1^n \frac{1}{k^2}\sin kx \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \sum_1^\infty \frac{1}{k^2}\sin kx \quad , \quad -\pi\le x\le\pi$$

أي أن المتسلسلة $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}\sin kx$ متقاربة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$.

أما المتسلسلة $\sum_1^\infty \frac{1}{k}\sin kx$ فلا نستطيع أن نقرر ما إذا كانت متقاربة أم متباعدة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ بالوسائل المتاحة. لكننا نقدم فيما يلي تعريفًا لمتتالية كوشي في $\mathcal{L}^2$ ، قياسًا على تعريف هذا المفهوم في $\mathbb{R}$ (انظر [1]) ، يسمح لنا بالبت في موضوع التقارب في $\mathcal{L}^2$ دون معرفة النهاية.

تعريف (1.7)

تسمى المتتالية $f_n\in\mathcal{L}^2$ **متتالية كوشي** (Cauchy sequence) إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $N\in\mathbb{N}$ بحيث

$$m,n\ge N \Rightarrow \|f_n-f_m\|<\varepsilon$$

واضح أن كل متتالية متقاربة في $\mathcal{L}^2$ هي متتالية كوشي لأنه، على افتراض أن $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ ، فإن

$$\|f_n-f_m\| = \|f_n-f+f-f_m\|$$

$$\le \|f_n-f\| + \|f_m-f\|$$

وبوسعنا أن نجعل الطرف الأيمن من هذه المتراجحة صغيرًا بالدرجة المطلوبة باختيار n و m كبيرتان بالدرجة الكافية.

أما العبارة العكسية بأن كل متتالية كوشي في $\mathcal{L}^2$ متقاربة من دالة في $\mathcal{L}^2$ فهي من خواص الفضاء $\mathcal{L}^2$ الأساسية، التي تعرف **بخاصة التمام**، وتناظر خاصة التمام في $\mathbb{R}$ (انظر [1]).

نظرية (1.3)

لكل متتالية كوشي f_n في $\mathcal{L}^2$ يوجد $f\in\mathcal{L}^2$ بحيث $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$.

هناك نظرية أخرى تنص على أن لكل دالة $f\in \mathcal{L}^2(a,b)$ يوجد متتالية من الدوال المتصلة على $[a,b]$ بحيث $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$، أي أن مجموعة الدوال المتصلة $C([a,b])$ **كثيفة** في $\mathcal{L}^2(a,b)$ على غرار كثافة الأعداد النسبية في $\mathbb{R}$ (مع اختلاف قياس التقارب)، لكننا لن نستخدم هذه النتيجة. يمكن الاطلاع على برهان كل من النظرية (1.3) ونظرية الكثافة في [10].

مثال (1.11)

بالاستناد إلى نظرية (1.3) نستطيع الآن أن نبت في تقارب المتسلسلة $\sum_1^\infty \frac{1}{k}\sin nx$، إذ أن

$$\|\sum_1^n \frac{1}{k}\sin kx - \sum_1^m \frac{1}{k}\sin kx\|^2 = \|\sum_{m+1}^n \frac{1}{k}\sin kx\|^2$$

على افتراض أن $m<n$. والآن، من تعامد المجموعة $\{\sin kx : k\in\mathbb{N}\}$ في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ (راجع مثال (1.4)) نرى أن

$$\|\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx\|^2=\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^2}\|\sin kx\|^2=\pi\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

ومن تقارب المتسلسلة $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}$ فإن لكل $\varepsilon>0$ يوجد N بحيث

$$n>m\geq N\Rightarrow \pi\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\pi\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\varepsilon$$

فنستنتج، بناء على النظرية (1.3)، أن المتسلسلة $\sum_1^\infty \frac{1}{k}\sin kx$ متقاربة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$.

وبالمثل فإن المتسلسلة $\sum_1^\infty \frac{1}{k}\cos kx$ متقاربة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$، مع أن هذه الأخيرة متباعدة نقطيا على $[-\pi,\pi]$ لأنها متباعدة عند $x=0$.

(1.6) المجموعات المتعامدة في $\mathcal{L}^2$

سنفترض فيما يلي أن $\{\varphi_n : n\in\mathbb{N}\}$ مجموعة متعامدة في $\mathcal{L}^2$ بحيث $\|\varphi_n\|>0$ لكل n. إذا كانت الدالة f ممثّلة بتركيب خطي منته من عناصر $\{\varphi_n\}$ بالشكل

$$f=\sum_1^n \alpha_k\varphi_k \tag{1.19}$$

فإن

$$\langle f,\varphi_i\rangle=\alpha_i\|\varphi_i\|^2 \quad , \quad i=1,\ldots,n$$

$$\Rightarrow \alpha_i=\frac{\langle f,\varphi_i\rangle}{\|\varphi_i\|^2}$$

مما يعني أن التمثيل (1.19) للدالة f هو تحديدًا

$$f=\sum_1^n\frac{\langle f,\varphi_k\rangle}{\|\varphi_k\|^2}\varphi_k$$

$$= \sum_1^n \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$$

حيث $\{\psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} : n \in \mathbb{N}\}$ هي المجموعة المتعامدة عياريًّا المولَّدة من $\{\varphi_n\}$.

من جهة أخرى، إذا كانت f أي دالة في $\mathcal{L}^2$، فإنه يهمنا أن نحصل على أفضل تقريب، بالنسبة للقياس في $\mathcal{L}^2$، للدالة f بواسطة تركيب خطي منته من عناصر $\{\varphi_n\}$. أي نريد أن نختار المعاملات α_k للحصول على أصغر قيمة للعدد غير السالب

$$\|f - \sum_1^n \alpha_k \varphi_k\|$$

لاحظ أن

$$\|f - \sum_1^n \alpha_k \varphi_k\|^2 = \left\langle f - \sum_1^n \alpha_k \varphi_k , f - \sum_1^n \alpha_k \varphi_k \right\rangle$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_1^n \mathrm{Re}\, \alpha_k \langle \varphi_k , f \rangle + \sum_1^n |\alpha_k|^2 \|\varphi_k\|^2$$

$$= \|f\|^2 - \sum_1^n \frac{|\langle f, \varphi_k \rangle|^2}{\|\varphi_k\|^2}$$

$$+ \sum_1^n \|\varphi_k\|^2 \left[|\alpha_k|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, \alpha_k \frac{\langle \varphi_k , f \rangle}{\|\varphi_k\|^2} + \frac{|\langle \varphi_k , f \rangle|^2}{\|\varphi_k\|^4} \right]$$

$$= \|f\|^2 - \sum_1^n \frac{|\langle f, \varphi_k \rangle|^2}{\|\varphi_k\|^2} + \sum_1^n \|\varphi_k\|^2 \left| \alpha_k - \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \right|^2$$

حيث تظهر المعاملات α_k في الحد الأخير من الطرف الأيمن

$$\sum_1^n \|\varphi_k\|^2 \left| \alpha_k - \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \right|^2 \geq 0$$

ومن الواضح أن الاختيار

$$\alpha_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2}$$

يعطي القيمة الصغرى للمقدار $\|f - \sum_1^n \alpha_k \varphi_k\|$ ، وهي

$$\left\| f - \sum_1^n \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_1^n \frac{|\langle f, \varphi_k \rangle|^2}{\|\varphi_k\|^2} \geq 0 \qquad (1.20)$$

فنحصل بذلك على العلاقة

$$\sum_1^n \frac{|\langle f, \varphi_k \rangle|^2}{\|\varphi_k\|^2} \leq \|f\|^2$$

وحيث إن هذه العلاقة صحيحة لكل n فهي إذن صحيحة في النهاية عندما $n \to \infty$ ، أي أن

$$\sum_1^\infty \frac{|\langle f, \varphi_k \rangle|^2}{\|\varphi_k\|^2} \leq \|f\|^2 \qquad (1.21)$$

تسمى العلاقة (1.21) **متراجحة بيسل** (Bessel's inequality)، وهي صحيحة لكل مجموعة متعامدة φ_k في $\mathcal{L}^2$ ولكل $f \in \mathcal{L}^2$.

بالنظر إلى (1.20) فإن متراجحة بيسل تتحول إلى مساواة إذا وفقط إذا كان

$$\left\| f - \sum_1^\infty \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \varphi_k \right\| = 0$$

أي إذا كان

$$f \doteq \sum_1^\infty \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \varphi_k$$

وهـذا يعـني أن الدالـة f ممثّلـة في $\mathcal{L}^2$ بالمتسلسلـة $\sum_1^\infty \alpha_n\varphi_k$ حيـث $\alpha_n = \dfrac{\langle f,\varphi_k\rangle}{\|\varphi_k\|^2}$.

تعريف (1.8)

يقال عن المجموعة $\{\varphi_n : n\in\mathbb{N}\}$ المتعامدة في $\mathcal{L}^2$ إنها **تامة** (complete) إذا كان لكل $f\in\mathcal{L}^2$ فإن

$$f \doteq \sum_1^\infty \frac{\langle f,\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2}\varphi_n$$

عندما تتحقق المساواة في متراجحة بيسل ، فإن المعادلة الناتجة

$$\|f\|^2 = \sum_1^\infty \frac{|\langle f,\varphi_n\rangle|^2}{\|\varphi_n\|^2} \tag{1.22}$$

تسمى **علاقة (أو متطابقة) بارسيفال** (Parseval's relation). وقد توصلنا إلى التشخيص التالي للمجموعة التامة في $\mathcal{L}^2$.

نظرية (1.4)

تكون المجموعة $\{\varphi_n : n\in\mathbb{N}\}$ المتعامدة في $\mathcal{L}^2$ تامة إذا وفقط إذا تحققت علاقة بارسيفال (1.22) لكل $f\in\mathcal{L}^2$.

ملحوظات

(1) وجدنا أننا نحصل على أفضل تقريب $\sum_1^n \alpha_n \varphi_k$ للدالة f بالنسبة للقياس $\|\cdot\|$ باختيار $\alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle / \|\varphi_k\|^2$ وأن هذا الاختيار لا يتأثر بالعدد n.

(2) عندما تكون المجموعة المتعامدة $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ عيارية فإن متراجحة بيسل تأخذ الصورة

$$\sum_1^\infty |\langle f, \psi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

وتتحول علاقة بارسيفال إلى

$$\|f\|^2 = \sum_1^\infty |\langle f, \psi_n \rangle|^2$$

(3) بما أن $\|f\| < \infty$ فمن معلوماتنا عن تقارب المتسلسلات نستنتج من متراجحة بيسل أن $\langle f, \psi_n \rangle \to 0$ عندما $n \to \infty$ لأي $f \in \mathcal{L}^2$، سواء كانت المجموعة المتعامدة عياريًا $\{\psi_n\}$ تامة أم لا.

من علاقة بارسيفال نحصل على

$$\|f\|^2 = \sum_1^\infty |\langle f, \psi_n \rangle|^2$$

ويمكن اعتبار هذه المساواة تعميما لنظرية فيثاغورس من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathcal{L}^2$، حيث يمثل الطرف الأيسر مربع طول المتجه ويمثل الطرف الأيمن مجموع مربعات أطوال المساقط. وحقيقة الأمر أن فضاء الضرب الداخلي $\mathcal{L}^2$ هو التوسيع الطبيعي للفضاء الإقليدي ذي الأبعاد المنتهية إلى فضاء غير منتهي الأبعاد، فهو يتمتع بنصيب وافر من البنية الهندسية القائمة في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$. كما أن صفة التمام التي نصت عليها نظرية (1.3) تضمن انغلاق $\mathcal{L}^2$ بالنسبة لعملية أخذ النهاية على متتاليات كوشي، وهذا يتيح لنا قدرا كبيرا من المرونة في إجراء العمليات التحليلية. يسمى $\mathcal{L}^2$ فضاء **هيلبرت** (Hilbert space) نسبة إلى الرياضي الألماني الكبير David Hilbert (1862-1943).

تمــارين (1.4)

(1) احسب النهاية في $\mathcal{L}^2(0,1)$ ، إن وجدت ، للمتتالية

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \le x < 1/n \\ 1 & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

(2) إذا كانت $\sum_1^\infty |a_n|$ متقاربة فأثبت أن $\sum_1^\infty |a_n|^2$ متقاربة ومن ثم استنتج أن $\sum_1^\infty a_n \sin nx$ متقاربة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ وأنها تمثل دالة متصلة على $[-\pi,\pi]$.

(3) حدد المعاملات a_i في الدالة

$$a_1 \sin\frac{\pi}{2}x + a_2 \sin\pi x + a_3 \sin\frac{3\pi}{2}x$$

للحصول على أفضل تقريب في $\mathcal{L}^2(0,2)$ للدالة

$$f(x)=1 \ , \ 0<x<2$$

(4) حدد المعاملات a_i و b_i في الدالة

$$a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x$$

للحصول على أفضل تقريب في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ للدالة

$$f(x) = |x| \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

(5) على افتراض أن

$$1 - x = \frac{8}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x \ , \ 0 \le x \le 2$$

استخدم علاقة بارسيفال للحصول على $\pi^4 = 96\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}$.

(6) عرف المتتالية الموجبة (a_n) بحيث تكون المتسلسلة $\sum_1^\infty a_n^2$ متقاربة والمتسلسلة $\sum_1^\infty a_n$ متباعدة. استنتج نوع التقارب الممكن للمتسلسلة $\sum_1^\infty a_n \cos nx$ حيث $-\pi \le x \le \pi$.

الفصل الثاني

مسألة شتورم-ليوفيل

تنشأ الدوال المتعامدة بصورة طبيعية كحلول لمعادلات تفاضلية من الرتبة الثانية بشروط حدية معينة. وفي هذا الفصل سنوجه اهتمامنا إلى نوع خاص من هذه المعادلات يعود الفضل في دراستها واستنباط خواص حلولها إلى الرياضي السويسري جاك شتورم (1803-1855) Jacque Sturm والرياضي الفرنسي جوزيف ليوفيل (1809-1882) Joseph Liouville في القرن التاسع عشر الميلادي.

(2.1) المعادلة الخطية ذات الرتبة الثانية

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة الثانية على الفترة الحقيقية I هي

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (2.1)$$

وهي تمثل النموذج الغالب في وصف الظواهر الطبيعية. تسمى المعادلة (2.1) **متجانسة** (homogeneous) إذا كانت $f \equiv 0$ على I. أية دالة $\varphi(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين على I تسمى **حلاً** للمعادلة إذا حققت المساواة

$$a_0(x)\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

إذا كانت الدالة $a_0(x)$ لا تساوي الصفر على I فإن المعادلة (2.1)، بعد القسمة على $a_0(x)$، تأخذ الشكل

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x) \qquad (2.2)$$

حيث $q = a_1/a_0$، $r = a_2/a_0$، $g = f/a_0$. واضح أن المعادلتين (2.1) و (2.2) متكافئتان (أي أن لهما نفس الحلول) طالما أن $a_0(x) \neq 0$ على I، ويقال عندئذ إن المعادلة التفاضلية (2.1) **منتظمة** (regular) على الفترة I. أما إذا كانت $a_0(c) = 0$ عند نقطة ما c في I فإن c تسمى **نقطة شاذة** (singular point) للمعادلة (2.1)، كما يقال عن المعادلة (2.1) عندئذ إنها **شاذة** عند النقطة c.

من المعلوم، حسب نظرية الوجود والوحدانية (انظر [7] أو [4])، أنه إذا كانت الدوال q، r، g جميعها متصلة على الفترة I وكانت x_0 أي نقطة في I فإن لأي عددين ξ و η يوجد للمعادلة (2.2) حل وحيد $\varphi(x)$ يحقق

$$\varphi(x_0) = \xi \,, \; \varphi'(x_0) = \eta \qquad (2.3)$$

تسمى المعادلتان (2.3) أحيانا **شروطًا ابتدائية** (initial conditions) باعتبار المتغير x يمثل الزمن، كما تسمى **شروطًا حدية** في أحيان أخرى، وعلى وجه الخصوص عندما تكون x_0 أحد طرفي الفترة I. وتبعا لذلك يسمى نظام المعادلات (2.2) و (2.3) **مسألة ابتدائية** (initial-value problem) أو **مسألة حدية** (boundany-value problem).

فيما يلي نلخص النتائج المعروفة عن حلول المعادلة التفاضلية (2.2):

(1) للمعادلة المتجانسة

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \qquad (2.4)$$

حلان مستقلان خطيًا $y_1(x)$ و $y_2(x)$، ويشكل التركيب الخطي منهما

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

الحل العام للمعادلة (2.4)، حيث c_1 و c_2 أي ثابتين، وعندما تكون $c_1 = c_2 = 0$ نحصل على **الحل التافه** (trivial solution) $y(x) \equiv 0$.

(2) إذا كان $y_p(x)$ أي حل للمعادلة غير المتجانسة (2.2) فإن $y_p + c_1y_1 + c_2y_2$ هو الحل العام للمعادلة (2.2). يتحدد الثابتان c_1 و c_2 بطبيعة الحال بعد تطبيق الشرطين (2.3)، فنحصل على الحل الوحيد المشار إليه آنفا.

(3) عندما يكون المعاملان q و r ثابتين فإن الحل العام للمعادلة (2.4) يأخذ الشكل

$$c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

حيث m_1 و m_2 جذرا المعادلة $m^2 + mq + r = 0$. وعندما يتساوى الجذران فإن الحل العام يكون على الصورة $c_1e^{mx} + c_2xe^{mx}$ حيث $m_1 = m_2 = m$.

(4) عندما تكون $q(x) = a_1/x$ ، $r(x) = a_2/x^2$ حيث $0 \notin I$ وكل من a_1 و a_2 ثابت فإن المعادلة (2.4) تكافئ

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0$$

المعروفة **بمعادلة كوشي ـ أويلر** (Cauchy-Euler equation)، والحل العام لهذه المعادلة هو

$$c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$$

حيث m_1 و m_2 جذرا المعادلة $m^2 + (a_1-1)m + (a_2-a_1) = 0$. وعندما يتساوى الجذران يصبح الحل $c_1x^m + c_2x^m \log x$.

(5) إذا كان المعاملان $q(x)$ و $r(x)$ دالتين تحليليتين حول نقطة ما c في الفترة I فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة (2.4) أيضا دالة تحليلية حول النقطة c، ممثلة بمتسلسلة القوى

$$\sum_0^\infty a_n(x-c)^n$$

المتقاربة في فترة التقارب المشتركة للدالتين q و r. تتحدد المعاملات a_n بدلالة الثابتين الاختياريين a_0 و a_1 بعد التعويض في المعادلة (2.4).

باعتبار $I=[a,b]$ قد تأخذ الشروط الحدية على المعادلة (2.1) أحد الأشكال التالية :

$$\text{(i)}\quad y(x_0)=\xi\ ,\ y'(x_0)=\eta\quad ,\quad x_0\in\{a,b\}$$

$$\text{(ii)}\quad y(a)=\xi\ ,\ y(b)=\eta$$

$$\text{(iii)}\quad y'(a)=\xi\ ,\ y'(b)=\eta$$

أو بصفة عامة

$$\begin{aligned}&\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)+\alpha_3 y(b)+\alpha_4 y'(b)=\xi\\&\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)+\beta_3 y(a)+\beta_4 y'(a)=\eta\end{aligned}\tag{2.5}$$

حيث α_i و β_i أعداد ثابتة (ليست كلها أصفارًا). نسمي الشروط الحدية (2.5) **متجانسة** (homogeneous) إذا كان $\eta=\xi=0$، و**منفصلة** (separated) إذا كان $\alpha_3=\alpha_4=\beta_3=\beta_4=0$، أي إذا كان

$$\begin{aligned}&\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=\xi\\&\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=\eta\end{aligned}\tag{2.6}$$

وهي التي تهمنا بالدرجة الأولى في هذه المعالجة. كما تسمى الشروط الحدية **دورية** (periodic) إذا كان

$$y(a)=y(b)\ ,\ y'(a)=y'(b)\tag{2.7}$$

تعريف (2.1)

لأي دالتين $f\ ,\ g\in C^1$ تسمى المحدِّدة

$$W(f(x),g(x))=\begin{vmatrix}f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix}=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$$

رونسكيان (Wronskian) الدالتين f و g.

واضح أن W دالة في المتغير x، ولذلك نرمز لها (تجاوزًا) بالرمز $W(x)$ عندما نرغب في إبراز هذه الصفة. وسنرى الآن أن دالة الرونسكيان تقوم بدور مهم في تحديد خواص حلول المعادلة التفاضلية، وهو دور يستند في الأساس على النتيجة التالية.

تمهيد (2.1)

إذا كان $y_1(x)$ و $y_2(x)$ حلين للمعادلة المتجانسة

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{2.8}$$

على الفترة I فإما أن $W(y_1,y_2) \equiv 0$ على I بكاملها أو أن $W(x)\neq 0$ لأي $x\in I$.

البرهان

من التعريف (2.1) لدينا

$$W' = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

وبما أن y_1 و y_2 حلان للمعادلة (2.8) فإن

$$y_1'' + qy_1' + ry_1 = 0$$

$$y_2'' + qy_2' + ry_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1y_2'' - y_2y_1'' + q(y_1y_2' - y_2y_1') = 0$$

$$W' + qW = 0$$

$$\Rightarrow \quad W(x) = c\exp\left(-\int_a^x q(t)dt\right) \tag{2.9}$$

وبناء عليه فإن $W(x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $c = 0$. □

ملحوظة: من الصيغة (2.9) نستنتج أن W دالة متصلة على I وأن لها بالتالي إشارة واحدة على هذه الفترة، كما نستنتج أن W' أيضا متصلة على I.

تمهيـد (2.2)

يكـون حــلا المعادلــة (2.8) y_1 و y_2 مســتقلّين خطيًّـا علــى I إذا وفقــط إذا كــان $W(y_1,y_2) \neq 0$ على I.

البرهــان

لنفـرض أولا أن y_1 و y_2 مرتبطـان خطيًّا، وسنثبت أن $W(y_1,y_2) = 0$. إذا كـان أحـد الحلـين صفرا فمــن الواضح أن $W(y_1,y_2) = 0$ وإذا لـم يكــن أحدهــما صفـرًا فـإن $y_2 = cy_1$، حيث $c \neq o$، ونحصل مرة أخرى على المساواة $W(y_1,y_2) = 0$.

من جهة أخرى، إذا كان $W(y_1,y_2) = 0$ عند نقطة ما في I فمن التمهيـد (2.1) تكون $W(y_1,y_2) = 0$ على الفترة I بكاملها، فنستنتــج عندئـذ أن المتجهيـن (y_1,y'_1) و(y_2,y'_2) مرتبطـان خطيا (راجـع التمريـن 1.1.13)، وعليـه فـإن y_1 و y_2 مرتبطـان خطيًّا. □

ملحوظـة: لاحـظ أننـا فـي الشـق الأول مـن البرهـان لـم نسـتفد مـن أن y_1 و y_2 حـلان للمعادلة (2.8).

مثــال (2.1)

للمعادلة التفاضلية

$$y'' + y = 0 \qquad (2.10)$$

حلان مستقلان هما $\cos x$ و $\sin x$ وبالتالي فإن الحل العام هو

$$y(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x$$

لاحظ أن

$$W(\cos x,\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

إذا اعتبرنا المعادلة (2.10) معطاة على الفترة $[0,\pi]$ تحت الشروط الحدية

$$y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1$$

فإننا نحصل على الحل الوحيد

$$y(x) = \sin x$$

كما هو متوقع. أما الشروط الحدية المتجانسة

$$y(0) = 0 \ \ , \ \ y'(0) = 0$$

فتعطي الحل التافه $y(x) = 0$.

من جهة أخرى فإن الشروط الحدية

$$y(0) = 0 \ , \ y(\pi) = 0$$

لا تعطي حلا وحيدًا لأن المعادلتين

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0$$

$$y(\pi) = c_1 \cos \pi \ + c_2 \sin \pi = 0$$

لا تحددان الثابت c_2، إذ أن

$$\begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos \pi & \sin \pi \end{vmatrix} = 0$$

ولذلك فإن الشروط الحدية (2.5) لا تحدد الثابتين c_1 و c_2 في الحل العام $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ في جميع الأحوال، ولكن الشروط

$$y(x_0) = \xi \ \ , \ \ y'(x_0) = \eta$$

تعطي حلاً وحيدًا على الدوام، لأن النظام

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = \xi$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = \eta$$

له حل وحيد، حيث إن

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

من استقلال الدالتين y_1 و y_2.

بصفة أعم، وبالرجوع إلى الشروط الحدية المنفصلة

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \xi$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta$$

نرى أن التعويض $y = c_1y_1 + c_2y_2$ يعطي

$$c_1[\alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a)] + c_2[\alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y_2'(a)] = \xi$$

$$c_1[\beta_1 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b)] + c_2[\beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b)] = \eta$$

فنستنتج أننا نحصل على حل وحيد إذا وفقط إذا كانت المحددة

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1')(a) & (\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_2')(a) \\ (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_1')(b) & (\beta_1 y_2 + \beta_2 y_2')(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

تمـــارين (2.1)

(1) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية

(i) $y'' - 4y' + 7y = e^x$

(ii) $xy'' - y' = 3x^2$

(iii) $x^2y'' + 2xy' + 1 = 0$

(2) استخـــدم متسلسلات القوى لحـــل المعـــادلة $y'' + 2xy' + 4y = 0$ حول النقطة $x = 0$. ما هي فترة التقارب؟

(3) أوجد حل المسألة الحدِّية

$$y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 0 \ , \quad -1 < x < 1$$

$$y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 1$$

(4) إذا كانت مجموعة الدوال $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ حلولاً للمعادلة التفاضلية (2.4) فأثبت أن

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \end{vmatrix} = 0$$

(5) لأي حلين مستقلين y_1 و y_2 للمعادلة المتجانسة (2.4) أثبت أن

$$q = \frac{-y_1y_2'' - y_2y_1''}{W(y_1,y_2)} \quad , \quad r = \frac{y_1'y_2'' - y_2'y_1''}{W(y_1,y_2)}$$

(6) استنتج المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة التي يكون لها الحلان التاليان

(i) x , $\sinh x$

(ii) $\cos x$, e^x

(iii) x^n , x^m $\quad n,m \in \mathbb{N}, n \neq m$

(7) أثبت أنه إذا كان $p,q \in C^n(I)$ فإن كل حل للمعادلة (2.4) ينتمي إلى $C^{n+2}(I)$ ، وعلى وجه الخصوص يكون الحل في $C^2(I)$ إذا كانت كل من p و q متصلة.

(2.2) أصفار الحلول

ليس من الضروري، وقد لا يكون من المتيسِّر، حل المعادلة

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{2.11}$$

للتعرف على طبيعة الحلول وخواصها. فالمعادلة التفاضلية نفسها، بالإضافة إلى الشروط الحدية المرافقة لها، تحدد هذه الحلول بشكل كامل (حسب نظرية الوجود والوحدانية)، وبالتالي فإن خواص هذه الحلول، مثل عدد أصفارها وتوزيعها، ونقاطها الشاذة، وخواص التعامد بينها، وما إلى ذلك، جميعها محكومة بالمعادلة (2.11) (أي بالمعاملين q و r) بالإضافة إلى الشروط الحدية المكملة لها. في هذا

البند سندرس تأثير الدالتين q و r على أصفار الحلول من حيث عددها وتوزيعها على خط الأعداد.

في المثال (2.1) وجدنا أن حلّي المعادلة $y'' + y = 0$ لهما عدد غير منته من الأصفار المختلفة موزعة بالتناوب على النحو التالي

$$\cdots < -\pi < -\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2} < \pi < \frac{3\pi}{2} < \cdots$$

حيث تمثل $\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ أصفار الدالة $\sin x$ ، بينما $\left\{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\right\}$ هي أصفار الدالة $\cos x$. سنرى الآن أن هذا الوضع ليس من قبيل الصدفة.

تمهيد (2.3)

إذا كان y حلاً غير تافه للمعادلة (2.11) فإن أصفار y معزولة.

البرهان

افرض أن x_0 صفر لـ y. إذا كان $y'(x_0) = 0$ فمن وحدانية حل المعادلة (2.11) لابد أن يكون y هو الحل التافه. إذن $y'(x_0) \neq 0$ ، فنستنتج من اتصال y' أنه يوجد جوار U للنقطة x_0 حيث $y' \neq 0$ ، وهذا يعني أن y إما متزايدة أو متناقصة (فعلا) على U. □

نظرية (2.1) (نظرية المقارنة الأولى)

إذا كان y_1 و y_2 حلين مستقلين خطيًّا للمعادلة

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad , \quad x \in I$$

فإن أصفار الدالة y_1 في I تختلف عن أصفار y_2 وتتوزع بالتناوب معها، بمعنى أن للدالة y_1 صفرًا واحدًا فقط بين كل صفرين متتاليين من أصفار y_2.

البرهان

بما أن الدالتين y_1 و y_2 مستقلتان خطيًّا فإن الرونسكيان

$$W(y_1,y_2) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

لا تساوي الصفر على I، ولها بالتالي إشارة واحدة (راجع الملحوظة التالية للتمهيد (2.1)). نلاحظ أولا أن y_1 و y_2 لا يمكن أن يكون لهما صفر مشترك وإلا أصبحت $W = 0$ عند تلك النقطة. لنفترض أن x_1 و x_2 صفران متتاليان للدالة y_2. إذن

$$W(x_1) = y_1(x_1)y_2'(x_1) \neq 0$$
$$W(x_2) = y_1(x_2)y_2'(x_2) \neq 0$$

ويترتب على ذلك أن أيًا من الأعداد $y_1(x_1)$ ، $y_2'(x_1)$ ، $y_1(x_2)$، $y_2'(x_2)$ لا يساوي الصفر. ومن اتصال y_2' يوجد لكل من النقطتين x_1 و x_2 جوار حيث لا تتغير إشارة y_2' ، فنستنتج من ذلك أن إشارة $y_2'(x_1)$ تختلف عن إشارة $y_2'(x_2)$ (لماذا؟). وهذا يستوجب اختلاف إشارة $y_1(x_1)$ عن إشارة $y_1(x_2)$ لكي تبقى إشارة $W(x)$ ثابتة، فلابد أن يكون للدالة المتصلة y_1 صفر واحد على الأقل بين x_1 و x_2.

افرض أن للدالة y_1 صفران x_3 و x_4 بين x_1 و x_2. باستخدام الحجة نفسها نستنتج أن y_2 لها صفر بين x_3 و x_4، بما يتناقض مع الفرضية أن x_1 و x_2 صفران متجاوران لـ y_2. □

لدراسة تعدد أصفار حلول المعادلة (2.11) من المفيد أن نتخلص من الحد الأوسط qy' بتحويل المعادلة إلى الصيغة

$$u'' + \rho(x)u = 0 \qquad (2.12)$$

وذلك بوضع

$$y(x) = u(x)v(x)$$
$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$y''(x) = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)$$

نرى الآن أن التعويض في المعادلة (2.11) يعطي

$$vu'' + (2v' + qv)u' + (v'' + qv' + rv)u = 0$$

حيث يختفي الحد الأوسط ونحصل على الصيغة (2.12) بوضع

$$2v' + qv = 0$$

$$\Rightarrow \qquad v(x) = \exp(-\frac{1}{2}\int_a^x q(t)dt) \qquad (2.13)$$

$$\rho(x) = r(x) - \frac{1}{4}q^2(x) - \frac{1}{2}q'(x)$$

بما أن $v(x) \neq 0$ لأي عدد حقيقي x فإن أصفار الدالة u هي نفسها أصفار الدالة y، وبوسعنا أن نحصر اهتمامنا في المعادلة (2.12) للتعرف على توزيع أصفار حلول المعادلة (2.11).

نظرية (2.2) (نظرية المقارنة الثانية)

افرض أن $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ حلّين غير تافهين للمعادلتين

$$y'' + r(x)y = 0 \;,\; y'' + \rho(x)y = 0 \;,\; x \in I$$

على الترتيب، وأن $r(x) \geq \rho(x)$. إذن للدالة φ صفر واحد على الأقل بين كل صفرين للدالة ψ، إلا إذا كان $r(x) = \rho(x)$ وكان $\varphi = c\psi$، حيث c عدد ثابت.

البرهــان

ليكن x_1 و x_2 صفرين متتاليين في I للدالة ψ، ولنفرض أن φ لا تساوي الصفر على الفترة (x_1,x_2). سنفترض، دون إخلال بعمومية المعالجة، أن كلا من φ و ψ موجبة على (x_1,x_2)، فيترتب على ذلك أن $\psi'(x_1) \geq 0$، $\psi'(x_2) \leq 0$. الآن

$$W(x_1) = \varphi(x_1)\,\psi'(x_1) \geq 0 \text{ و } W(x_2) = \varphi(x_2)\,\psi'(x_2) \leq 0 \qquad (2.14)$$

كما أن

$$W'(x) = \varphi(x)\,\psi''(x) - \varphi''(x)\,\psi(x)$$

$$= [r(x) - \rho(x)]\,\varphi(x)\,\psi(x) \geq 0 \qquad \forall x \in (x_1,x_2)$$

مما يعني أن الدالة W متزايدة على الفترة (x_1,x_2)، وهذا يناقض (2.14) إلا إذا كانت $0 \equiv W(x) \equiv \rho(x) - r(x)$، وعندئذ نرى من التمهيد (2.2) أن الحلين φ و ψ مرتبطان خطيًّا. □

نتيجة (2.2.1)

ليكن φ حلاً غير تافه للمعادلة $y'' + r(x)y = 0$ على الفترة I. إذا كان $r(x) \leq 0$ فإن للدالة φ صفرًا واحدًا على الأكثر في I.

البرهان

واضح أن للمعادلة $y'' = 0$ صفرًا واحدًا على الأكثر، وسنكتفي بمعالجة الحالة $r(x) \neq 0$. افرض أن للدالة φ صفرين في الفترة I هما x_1 و x_2. بما أن الدالة $u(x) = 1$ حل للمعادلة $y'' = 0$ فإن النظرية (2.2) تقتضي أن يكون للدالة u صفر بين x_1 و x_2، وهذا مستحيل. □

مثال (2.2)

(i) أي حل للمعادلة $y''= 0$ على $\mathbb{R}$ هو حالة خاصة من الحل العام

$$\varphi(x) = c_1x + c_2$$

الممثّل بخط مستقيم لا يتقاطع مع محور x في أكثر من نقطة واحدة.

(ii) أي حل للمعادلة $y'' - y = 0$ على $\mathbb{R}$ سيكون بالصورة

$$\varphi(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

وإذا استبعدنا الحل التافه فإن $\varphi(x) \neq 0$ إلا عندما $c_2 = -c_1$ وعندئذ يكون للدالة φ صفر واحد في $\mathbb{R}$ عند النقطة $x = 0$.

(iii) في حالة المعادلة $y'' + y = 0$، حيث $r(x) = 1$، نعلم أن أصفار الحل

$$\varphi(x) = c_1\cos x + c_2 \sin x = a \sin(x-b)$$

حيث $a=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ ، $b=\tan^{-1}(c_1/c_2)$، هي المجموعة غير المنتهية $\{x_n=b+n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$.

يسمى الحل **متذبذبا** (oscillatory) إذا كانت مجموعة أصفاره غير منتهية، كما في (iii) من مثال (2.2). نستخلص من النظرية (2.2) ونتيجتها أن تذبذب حلول المعادلة $y''+r(x)y=0$ محكوم إلى حد كبير بإشارة المقدار $r(x)$، فعندما تكون $r(x)\le 0$ لا يكون هناك أي تذبذب. وعندما يكون

$$r(x)>k^2>0$$

حيث k ثابت موجب، فإن أي حل للمعادلة $y''+r(x)y=0$ في $\mathbb{R}$ له عدد غير منته من الأصفار موزعة بين أصفار الحل العام للمعادلة $y''+k^2y=0$

$$c_1\cos kx+c_2\sin kx=a\sin k(x-b)$$

حيث $a\neq 0$ و b ثابتان اختياريان. وبما أن أصفار الدالة $\sin k(x-b)$ هي المجموعة $\{x_n=b+n\pi/k : n\in\mathbb{Z}\}$ فمن الواضح أن كل فترة حقيقية بطول π/k تحوي صفرًا واحدًا على الأقل من أصفار أي حل للمعادلة $y''+r(x)y=0$. ويبدو لأول وهلة أن تعدد أصفار هذه المعادلة يتناسب تناسبًا عكسيًّا مع قيمة k.

مثال (2.3)

تسمى المعادلة

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0\ ,\ 0<x<\infty \tag{2.15}$$

معادلة بيسل من الرتبة n، نسبة إلى العالم الفلكي الألماني F.W.Bessel (1784-1846)، وهي موضوع الفصل الخامس. باستخدام القاعدة (2.13) لإجراء التحويل $u=\sqrt{x}\,y$ نجد أن المعادلة (2.15) تأخذ الشكل

$$u'' + (1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2})u = 0 \qquad (2.16)$$

وبمقارنة المعادلة (2.16) مع $u'' + u = 0$ نرى أن كل فترة جزئية من $(0,\infty)$ بطول π فيها صفر واحد على الأقل لأي حل لمعادلة بيسل من الرتبة $0 \le n \le \frac{1}{2}$ ، حيث $r(x) = 1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2} \ge 1$ ، وفيها صفر واحد على الأكثر لأي حل غير تافه لمعادلة بيسل من الرتبة $n > \frac{1}{2}$ حيث $r(x) = 1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2} < 1$.

تمارين (2.2)

(1) استنتج من التمهيد (2.3) أن أصفار أي حل غير تافه للمعادلة $y'' + r(x)y = 0$ على فترة محدودة هي مجموعة منتهية.

(2) ليكن φ حلاً غير تافه للمعادلة $y'' + r(x)y = 0$ حيث $r(x) > 0$ على $(0,\infty)$. إذا كان $\varphi(x) > 0$ على $(0,a)$ وكان هناك نقطة x_0 في $(0,a)$ حيث $\varphi'(x_0) < 0$ فأثبت أن للدالة φ صفرًا عن يمين النقطة x_0.

(3) افرض أن φ حل غير تافه للمعادلة $y'' + r(x)y = 0$ وأن $r(x) > 0$ لكل $x > 0$. إذا كان $\int_1^\infty r(x)dx = \infty$ فأثبت أن للدالة φ عددًا غير منته من الأصفار الموجبة.

إرشاد: لو كان للدالة φ عدد منته من الأصفار في $(0,\infty)$ لكان هناك $a > 1$ بحيث $\varphi > 0$ على $[a,\infty)$. عرف $\psi = -\varphi'/\varphi$ على $[a,\infty)$ واستنتج أن $\psi' = r + \psi^2$ ومن ثم

$$\psi(x) = \varphi(a) + \int_a^x r(t)dt + \int_a^x \psi^2(t)dt$$

بيّن الآن أن هناك $b > a$ بحيث $\varphi'(x) < 0$ على $[b,\infty)$ واستخدم نتيجة التمرين (2).

(4) أثبت أن أي حل غير تافه للمعادلة $y'' + \frac{k}{x^2}y = 0$ على $(0,\infty)$ له عدد غير منته من الأصفار إذا وفقط إذا كان $k > \frac{1}{4}$. هل يتوافق ذلك مع نتيجة التمرين (3)؟

(5) عين المعادلات ذات الحلول المتذبذبة على $(0,\infty)$ من بين

$$\text{(i)}\ \ y'' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad \text{(ii)}\ \ y'' - x^2 y = 0 \qquad \text{(iii)}\ \ x\sqrt{x}\,y'' + ky = 0$$

حيث k ثابت موجب.

(6) أوجد الحل العام لمعادلة بيسل من الرتبة 0 وعيِّن أصفاره.

(7) إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ فأثبت أن حلول المعادلة $y'' + (1 + f(x))y = 0$ متذبذبة.

(8) أثبت أن حلول معادلة **إيري** (Airy) $y'' + xy = 0$ لها عدد غير منته من الأصفار على محور x الموجب، وصفر واحد على الأكثر على المحور السالب.

(2.3) المؤثر قرين الذات في $\mathscr{L}^2$

لدراسة التعامد وما يتعلق به من خواص لحلول المعادلة الخطية من الرتبة الثانية

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{2.17}$$

يتطلب الأمر دراسة هذه الحلول في الفضاء $\mathscr{L}^2$. ولهذا الغرض نعرِّف **المؤثِّر** (operator) أو **التحويل** (transformation) **الخطي** في فضاء المتجهات X بأنه تطبيق $A:X\to X$ يحقق

$$A(ax + by) = aAx + bAy \quad \forall a,b \in \mathbb{F}, \forall x,y \in X$$

وعندما يكون حاصل الضـرب الداخلي معرفًا في X فإن **قرين** (adjoint) المؤثـر A يعرَّف بأنه ذلك المؤثر A' الذي يحقق

$$\langle Ax,y\rangle = \langle x,A'y\rangle \quad \forall x,y \in X$$

فإن كان $A'=A$ قيل عن المؤثر A إنه **قرين ذاته** (self-adjoint).

في الفضاء $\mathbb{R}^n$ نعلم أن الصورة العامة للتحويـل الخطي A، بالنسبة للأسـاس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^n$ ، هي مصفوفة حقيقية

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

وأن

$$A' = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ji})$$

حيث A^T هو **منقول** (transpose) المصفوفة A. وفـي الفضـاء $\mathbb{C}^n$ تكـون عنـاصر A أعدادًا مركبة ويأخذ قرين A الصورة $A' = \overline{A}^T$ حيث $\overline{A}$ هي المصفوفة المكونة مـن عناصر A بعد تبديل كل عنصر بمرافقه، أي أن $a'_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

ليكـن X فضـاء ضـرب داخلـي بعـدد منتـه مـن الأبعـاد (مثـل الفضـاء الاقليـدي)، وليكـن A مؤثـرًا خطيًـا فـي X. يسـمى العـدد المركـب a **قيمـة ذاتيـة** (eigenvalue) لـ A إذا وجد متجه $x \neq 0$ في X بحيث $Ax = ax$ ، ويسمى x في هذه الحالة **متجها ذاتيا** (eigenvector) للمؤثر A مناظرًا للقيمـة الذاتيـة a. ومـن معلوماتنـا من الجبر الخطي (انظر [9] على سبيل المثال)، إذا كـان A قرينـا لذاتـه (أو **هرميتي** Hermitian) فإن

(i) القيم الذاتية لـ A جميعها أعداد حقيقية.

(ii) المتجهات الذاتية المناظرة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة.

(iii) مجموعة المتجهات الذاتية لـ A تشكل أساسًا للفضاء X.

سنسعى الآن لتعميم هذه النتيجة إلى الفضاء $\mathcal{L}^2$ حيث يحل محل المصفوفة A **المؤثر الخطي التفاضلي** (linear differential aperator) L. الصيغة العامة لمثل هذا المؤثر من الرتبة n هي

$$L = a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x) \qquad (2.18)$$

حيث $a_0(x) \neq 0$ لكل $x \in I$، والمعاملات $a_i(x)$ تتحلى بدرجة كافية من الملوسة، كأن تكون $a_i \in C^n(I)$ لكل i. واضح أن المؤثر L يحوِّل كل دالة $y \in C^n(I)$ إلى دالة متصلة $Ly \in C(I)$، فهو إذن تحويل من $C^n(I)$ إلى $C(I)$. لكن رغبتنا في بحث الاقتران بين المؤثرات والتعامد بين الدوال يستوجب تقليص مجال تعريف L ومداه بحيث يكون L تحويلا من $\mathcal{L}^2(I) \cap C^n(I)$ إلى $\mathcal{L}^2(I) \cap C(I)$ (أو مجرد $\mathcal{L}^2(I)$)، لأن هذه المفاهيم ليس لها معنى خارج فضاء الضرب الداخلي $\mathcal{L}^2$. وجدير بالملاحظة هنا أن

$$\mathcal{L}^2(I) \cap C^n(I) = C^n(I)$$

عندما تكون الفترة I مغلقة ومحدودة.

بالنظر إلى أن موضوع البحث هو المعادلة الخطية من الرتبة الثانية (2.17) فمن الطبيعي أن نحصر اهتمامنا بالمؤثر

$$L = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\frac{d}{dx} + r(x) \qquad (2.19)$$

حيث نفترض أن $p,q,r \in C^2(I)$ وأن

$$L: \mathscr{L}^2(I) \cap C^2(I) \to \mathscr{L}^2(I)$$

للحصول على صيغة المؤثر L'، قرين L، الذي يحقق المساواة

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, L'g\rangle \quad \forall f,g \in \mathscr{L}^2(I) \cap C^2(I) \tag{2.20}$$

سنضع $I = (a,b)$ ونستخدم التكامل بالتجزيء لتقويم الطرف الأيسر من (2.20).

$$\begin{aligned}
\langle Lf, g\rangle &= \int_a^b (pf'' + qf' + rf)\overline{g}dx \\
&= pf'\,\overline{g}\Big|_a^b - \int_a^b f'(p\overline{g})'dx + qf\overline{g}\Big|_a^b - \int_a^b f(q\overline{g})'dx + \int_a^b fr\overline{g}dx \\
&= [pf'\,\overline{g} - f(p\overline{g})']\Big|_a^b + \int_a^b f(p\overline{g})''dx + qf\overline{g}\Big|_a^b - \int_a^b f(q\overline{g})'dx \\
&\quad + \int_a^b fr\overline{g}dx \\
&= \langle f, (\overline{p}g)'' - (\overline{q}g)' + \overline{r}g\rangle + [p(f'\,\overline{g} - f\overline{g}') + (q - p')f\overline{g}]\Big|_a^b
\end{aligned}$$

حيث نعتبر هذه التكاملات معتلة في حالة أن الفترة (a,b) غير محدودة أو أن الدوال المذكورة غير محدودة عند a أو b. إذن

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, L^*g\rangle + [p(f'\,\overline{g} - f\overline{g}') + (q - p')f\overline{g}]\Big|_a^b \tag{2.21}$$

حيث

$$\begin{aligned}
L^*g &= (\overline{p}g)'' - (\overline{q}g)' + \overline{r}g \\
&= \overline{p}g'' + (2\overline{p}' - \overline{q})g' + (\overline{p}'' - \overline{q}' + \overline{r})g
\end{aligned}$$

يسمى المؤثر

$$L^* = \overline{p}\frac{d^2}{dx^2} + (2\overline{p}' - \overline{q})\frac{d}{dx} + (\overline{p}'' - \overline{q}' + \overline{r})$$

القرين الشكلي (formal adjoint) للمؤثر L. وعندما يكون $L^*=L$ يقال عن L إنه **قرين ذاته شكلاً** (formally self-adjoint)، وهذا يتحقق عندما

$$\overline{p} = p \;,\; 2\overline{p}' - \overline{q} = q \;,\; \overline{p}'' - \overline{q}' + \overline{r} = r$$

أي عندما تكون الدوال p و q و r كلها حقيقية ويكون $q = p'$. وعندئذ يصبح

$$\begin{aligned} Lf &= pf'' + p'f' + rf \\ &= (pf')' + rf \end{aligned}$$

أي أن المؤثر $L = L^*$ يأخذ الصيغة

$$L = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + r \tag{2.22}$$

ويسقط الحد الأخير في المعادلة (2.21) فنحصل على

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle + p(f'\,\overline{g} - f\overline{g}')\Big|_a^b$$

مما يعني أن L قرين ذاته إذا وفقط إذا كان

$$p(f'\,\overline{g} - f\,\overline{g}')\Big|_a^b = 0 \tag{2.23}$$

أي أن الاختلاف بين الاقتران الذاتي الشكلي والحقيقي ينشأ من الفرق بين قيمتي $p(f'\,\overline{g} - f\,\overline{g}')$ عند الطرفين a وb (أو نهايتيهما).

النظرية التالية تلخص ما توصلنا إليه وتعمم الخواص (i) و (ii) للمؤثر قرين ذاته من الفضاء ذي الأبعاد المنتهية إلى $\mathcal{L}^2 \cap C^2$. سنستخدم مصطلح **الدالة الذاتية** (eigenfunction) بدلا عن "المتجه الذاتي" عند الحديث عن فضاء المتجهات المكون من دوال، ونقصد بذلك الدالة غير الصفرية u التي تحقق

$$Lu + \lambda u = 0 \tag{2.24}$$

حيث $\lambda \in \mathbb{C}$ قيمة L الذاتية المناظرة لـ u. لاحظ أن القيمة الذاتية للمؤثر L، حسب التعريف الشائع في الجبر الخطي، هي $-\lambda$ وليس λ. لكننا، تمشيا مع التقليد المتبع في المعادلات التفاضلية، سنعتبر λ في المعادلة (2.24) هي القيمة الذاتية للمؤثر التفاضلي L. ولعل السبب في تفضيلنا التعامل مع المعادلة $Lu + \lambda u = 0$ بدلا عن $Lu = \lambda u$ يعود إلى رغبتنا في أن تكون إشارة λ موجبة عندما تكون $p(x)$ دالة موجبة، كما سنرى فيما بعد.

نظريـة (2.3)

ليكـن L مؤثـرًا تفاضليًّا خطيًّا من الرتبـة الثانيـة معرفـا مـن $\mathcal{L}^2(a,b)\cap C^2(a,b)$ إلـى $\mathcal{L}^2$ (a,b) بالصيغة (2,19).

(1) يكون المؤثر L قرينًا لذاته شكلاً، أي أن $L^*=L$، إذا وفقط إذا كان

$$L = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + p'(x)\frac{d}{dx} + r(x) = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{d}{dx}) + r(x)$$

حيث $p,r \in C^2(a,b)$.

(2) يكـون L قرينًـا لذاتـه، أي أن $L'=L$، إذا وفقـط إذا كـان قرينـا لذاتـه شـكلا وتحققت المساواة (2.23) لكـل الـدوال f و g في مجـال تعريـف L، وعندئذ فإن

(i) جميع القيم الذاتية لـ L أعداد حقيقية.

(ii) الدوال الذاتية المرتبطة بقيم ذاتية مختلفة متعامدة.

البرهـان

سبق أن أثبتنا الفقرة (1) من النظرية، وفيما يلي برهان الفقرة (2):

(i) لنفرض أن λ قيمة ذاتيـة للمؤثـر L، فيكـون هنـاك $f \not\equiv 0$ في $\mathcal{L}^2\cap C^2$ بحيـث $Lf + \lambda f = 0$. إذن

$$\lambda\|f\|^2 = \langle \lambda f, f\rangle = -\langle Lf, f\rangle$$

وبما أن L قرين ذاته فإن

$$-\langle Lf, f\rangle = -\langle f, Lf\rangle = \langle f, \lambda f\rangle = \bar{\lambda}\|f\|^2$$

ونستنتج أن $\lambda = \bar{\lambda}$.

(ii) إذا كانت μ قيمة ذاتية أخرى لـ L مناظرة للدالة الذاتية $g \not\equiv 0$ في $\mathcal{L}^2\cap C^2$ فإن

$$\lambda\langle f , g\rangle = -\langle Lf , g\rangle = -\langle f , Lg\rangle = \mu\langle f , g\rangle$$

$$(\lambda - \mu)\ \langle f,g\rangle = 0$$

$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle f,g\rangle = 0$$

□

مثـال (2.4)

للحصول على القيم والدوال الذاتية للمؤثر $\frac{d}{dx}$ نبحث عن حلول المعادلة $y' + \lambda y = 0$ فنجد أنها

$$y(x) = ce^{-\lambda x}$$

ونستنتج أن القيم الذاتية λ هي جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وأن الدوال الذاتية في الفضاء $C^1(I)$ الحقيقي هي $\{e^{-\lambda x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. كما أن كل عدد مركب λ هو أيضا قيمة ذاتية مناظرة للدالة الذاتية المركبة $e^{-\lambda x}$ في الفضاء $C^1(I)$ المركب.

إذا كانت $I = \mathbb{R}$ فمن الواضح أن الدوال الذاتية $e^{-\lambda x}$ لا تقع في $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ لأي λ. وإذا كانت $I = [0,\infty)$ فإن $e^{-\lambda x} \in \mathscr{L}^2(0,\infty)$ لكل $\lambda \in \mathbb{C}$ بحيث $\text{Re}\lambda > 0$. أما إذا كانت $I = [a,b]$ فإن جميع الدوال الذاتية $e^{-\lambda x}$ تنتمي إلى $\mathscr{L}^2(a,b)$، ولدينا عندئذ

$$\left\langle \frac{d}{dx} f, g \right\rangle = \int_a^b f'g\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'\,dx \qquad \forall f, g \in C^2(a, b)$$

مما يعني أن $L^* = -\frac{d}{dx}$، فنستنتج أن $L^* \neq L$ وأن المؤثر $\frac{d}{dx}$ ليس قرينًا لذاته شكلا، ومن ثم فهو ليس قرينا لذاته.

مثـال (2.5)

أما المؤثر $\frac{d^2}{dx^2}$ فهو قرين لذاته شكلاً لأنه حالة خاصة من الصيغة العامة (2.22) حيث $p = 1$ و $r = 0$. وللحصول على دواله الذاتية في $C^2(0,\pi)$ نبحث عن حلول المعادلة $u'' + \lambda u = 0$، وهي

$$u(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x \tag{2.25}$$

بالشروط الحدّية

$$u(0) = u(\pi) = 0 \tag{2.26}$$

نجد أن المساواة (2.23) محققة وأن $\frac{d^2}{dx^2}$ بالتالي قرين لذاته. كما أن

$$u(0) = c_1 = 0$$

$$u(\pi) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\pi = n\pi \Rightarrow \lambda = n^2, n \in \mathbb{N}$$

مما يعني أن القيم الذاتية للمؤثر $\frac{d^2}{dx^2}$ هي المتالية $(n^2 : n \in \mathbb{N})$ وأن الدوال الذاتية المناظرة هي $(\sin nx : n \in \mathbb{N})$. لاحظ أننا استبعدنا حالة $n = 0$ لأن $\sin 0 = 0$ ليست مقبولة كدالة ذاتية، كما استبعدنا قيم n الصحيحة السالبة لأن $\sin(-n)x = -\sin nx$ فهي لا تضيف إلى المجموعة $\{\sin nx : n \in \mathbb{N}\}$ أي دوال مستقلة.

لاحظ أيضا أن القيم الذاتية $\lambda_n = n^2$ أعداد حقيقية وأن الدوال الذاتية $u_n(x) = \sin x$ متعامدة في $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ (تحقق من ذلك!)، بما يتفق مع الفقرتين (i) و(ii) من نظرية (2.3).

تمارين (2.3)

(1) باعتبار $L = \frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx}) + r$ ، أثبت **متطابقة لاقرانج** (Lagrange identity)

$$uLv - vLu = [p(uv' - vu')]'$$

(2) أوجد القيم والدوال الذاتية لكل من

(i) $$-\frac{d^2}{dx^2} : C^2(0,\infty) \to C(0,\infty)$$

(ii) $$-\frac{d^2}{dx^2} : \mathcal{L}^2(0,\infty) \cap C^2(0,\infty) \to \mathcal{L}^2(0,\infty)$$

(3) أثبت أن المؤثر d^2/dx^2 المعرف على فضاء الدوال $\{u\in C^2(0,\pi):u(0) = u'(\pi) = 0\}$ قرين لذاته، ثم أوجد القيم والدوال الذاتية له.

(4) تحقق من انطباق الشرطين (i) و (ii) في نظرية (2.3) على القيم والدوال الذاتية للمؤثر المعرف في التمرين (2.3.3).

(5) ابحث خواص المؤثر المعرف في التمرين (ii) 2.3.2 على ضوء النظرية (2.3).

(6) افرض أن $py'' + qy' + ry + \lambda y = 0$ على (a,b) حيث $p(x) > 0$. استنتج أن هذه المعادلة تتحول إلى الصيغة $\tilde{p}y'' + \tilde{p}'y' + \tilde{r}y + \lambda wy = 0$ بالضرب في الدالة الموجبة $\frac{1}{p}\exp(\int q / p)$. لاحظ أن ذلك يسمح لنا بتحويل المؤثر $p\frac{d^2}{dx^2}+q\frac{d}{dx}+r$، حيث $p>0$، إلى المؤثر القرين لذاته $\tilde{p}\frac{d^2}{dx^2}+\tilde{p}'\frac{d}{dx}+\tilde{r}$.

(7) ضع كلا من المؤثرات التالية في الصورة $p\frac{d^2}{dx^2}+p'\frac{d}{dx}+r$، حيث $p > 0$، بالضرب في دالة مناسبة.

(i) $x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}+1 \quad , \quad x > 0$

(ii) $\frac{d^2}{dx^2}-x\frac{d}{dx}$

(iii) $\cos x\frac{d^2}{dx^2}+\sin x\frac{d}{dx}-\cos^2 x \, , -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(2.4) مسألة شتورم ـ ليوفيل العادية

وجدنا في البند (2.3) أن المؤثر التفاضلي

$$L = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + p'(x)\frac{d}{dx} + r(x)$$

المعرف من $\mathscr{L}^2(a,b)\cap C^2(a,b)$ إلى $\mathscr{L}^2(a,b)$ قرين لذاته إذا قصرنا مجال تعريفه على الدوال التي تحقق المساواة (2.23). وعندئذ تصبح حلول المعادلة التفاضلية

$$Lu + \lambda u = 0 \qquad (2.27)$$

حسب النظرية (2.3)، هي الدوال الذاتية المتعامدة المناظرة للقيم الذاتية الحقيقية λ. لتحقيق المساواة (2.23) سنفترض أن الشروط الحدّية على حلول المعادلة (2.27) من النوع المنفصل المتجانس، أي أن

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \qquad (2.28)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$$

حيث نستبعد بالطبع الحالتين $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ، $\beta_1 = \beta_2 = 0$. وسنترك للقارئ التحقق من صحة المساواة (2.23) لأي دالتين تحققان الشروط (2.28).

توفّر الفقرتان (i) و (ii) من نظرية (2.3) التعميم الطبيعي لخواص المؤثر قرين الذات من الفضاء الإقليدي إلى $\mathscr{L}^2$، وتظل الخاصة (iii)، التي تنص على أن المتجهات الذاتية للمؤثر تشكل أساسًا للفضاء، في انتظار التعميم المناسب. سنجد التعميم المطلوب في نظرية (2.4) أدناه، التي نقدمها دون برهان لأن برهانها طويل ومتشعب، وبوسع القارىء المهتم أن يطلع عليه في [4] أو [8].

تسمى المعادلة التفاضلية

$$p(x)u'' + p'(x)u' + r(x)u + \lambda u = 0 \qquad (2.29)$$

حيث $p,r\in C^2(a,b)$ والدالة $p(x)$ موجبة على $[a,b]$، مع الشروط الحدية

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \ , \quad |\alpha_1|+|\alpha_2| \neq 0 \qquad (2.30)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \ , \quad |\beta_1|+|\beta_2| \neq 0$$

مسألة شتورم ـ ليوفيل العادية (regular Sturm-Liouville problem)، وهي موضوع اهتمامنا في هذا البند. وتسمى هذه المسألة **عادية** لأن الفترة [a,b] محدودة والدالة p موجبة، وسيترتب على إرخاء واحد أو أكثر من هذه الشروط ظهور ما يسمى بالمسألة **الشاذة** (singular)، وهي موضوع الفصل الرابع.

لقد جرت العادة على اعتبار العدد λ الذي يحقق المعادلة (2.29) قيمة ذاتية لمسألة شتورم ـ ليوفيل، كما تسمى الدالة المناظرة والتي تحقق الشروط الحدية (2.30) دالة ذاتية للمسألة. مما سبق نعلم أن القيم الذاتية أعداد حقيقية وأن الدوال الذاتية متعامدة.

نظرية (2.4)

لمسألة شتورم ـ ليوفيل المعرَّفة بنظام المعادلات (2.29) و (2.30) عدد غير منته من القيم الذاتية الحقيقية

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$$

بحيث $\lim \lambda_n = \infty$. ولكل قيمة ذاتية λ_n يوجد دالة ذاتية u_n بحيث تشكل $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ مجموعة متعامدة وتامة في $\mathcal{L}^2(a,b)$ بمعنى أن لكل $f \in \mathcal{L}^2(a,b)$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle f, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \right\| = 0$$

مثال (2.6)

من أبسط الأمثلة على مسائل شتورم ـ ليوفيل الحالة الخاصة التي تكون فيها $p(x) = 1$ و $p(x) = 0$ على الفترة $[0, \ell]$:

$$u'' + \lambda u = 0$$

بأحد الشروط الحدية

$$\text{(i)} \quad u(0) = u(\ell) = 0$$

$$\text{(ii)} \quad u'(0) = u'(\ell) = 0$$

للحصول على القيم والدوال الذاتية لهذه المسألة نبدأ بإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية، وهو

$$u(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x \qquad (2.31)$$

(i) بتطبيق الشروط (i) نحصل على

$$u(0) = c_1 = 0$$

$$u(\ell) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\ell = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\ell = n\pi \;, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lambda = n^2\pi^2/\ell^2$$

لاحظ أننا عند تطبيق الشرط الثاني لا نستطيع أن نسمح بأن تكون $c_2 = 0$ لأنه يقود إلى الحل التافه. وبذلك تكون القيم الذاتية $\lambda_n = n^2\pi^2/\ell^2$، وهي تؤول إلى ∞ عندما $n \to \infty$ كما نصت على ذلك نظرية (2.4). والدوال الذاتية هي $u_n(x) = \sin\frac{n\pi}{\ell}x$ ، وهي متعامدة على $[0,\ell]$ لأن

$$\left\langle \sin\frac{n\pi}{b}x, \sin\frac{m\pi}{b}x \right\rangle = \int_0^\ell \sin\frac{n\pi}{\ell}x \sin\frac{m\pi}{\ell}x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\ell \left[\cos(n-m)\frac{\pi}{\ell}x - \cos(n+m)\frac{\pi}{\ell}x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\ell}{(n-m)\pi}\sin(n-m)\frac{\pi}{\ell}x - \frac{\ell}{(n+m)\pi}\sin(n+m)\frac{\pi}{\ell}x\right]_0^\ell$$

$$= 0 \qquad \forall n \neq m$$

نستنتج من نظرية (2.4) أن المجموعة $\left\{\sin\frac{n\pi}{\ell}x : n \in \mathbb{N}\right\}$ تامة في $\mathcal{L}^2(0,\ell)$.

(ii) وبتطبيق الشروط (ii) على الحل العام (2.31) نجد أن

$$u'(0) = \sqrt{\lambda}\, c_2 = 0$$

إذا كان $\sqrt{\lambda} = 0$ فإن الحل $u(x) = c_1$ يحقق الشرط $u'(\ell) = 0$، مما يعني أن الدالة الذاتية للقيمة الذاتية $\lambda_0 = 0$ هي $u_0(x) = 1$.

وإذا كان $c_2 = 0$ فإن $u(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x$ ونحصل من الشرط الثاني على

$$u'(\ell) = -c_1\sqrt{\lambda}\,\sin\sqrt{\lambda}\,\ell = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\ell = n\pi \Rightarrow n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \;,\; n \in \mathbb{N}$$

فنستنتج أن بقية القيم الذاتية هي $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$ حيث $n \in \mathbb{N}$، والدوال الذاتية المناظرة هي $u_n(x) = \cos\frac{n\pi}{\ell}x$. بعبارة أخرى، لدينا

$$\lambda_n = n^2\pi^2/\ell^2 \quad,\quad u_n(x) = \cos\frac{n\pi}{\ell}x \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

نلاحظ مرة أخـــرى أن المجموعة $\left\{\cos\frac{n\pi}{\ell}x : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ متعامدة على $[0,\ell]$، ونستنتج من نظرية (2.4) أنها أيضا تامة في $\mathcal{L}^2(0,\ell)$.

مثـال (2.7)

أوجد القيم والدوال الذاتية للمعادلة

$$u'' + \lambda u = 0 \quad,\quad -\ell < x < \ell$$

تحت الشروط الدورية

$$u(-\ell) = u(\ell) \quad,\quad u'(-\ell) = u'(\ell)$$

الحـــل

واضح أن الشروط الدورية تحقق المساواة (2.23) وأن المسألة بالتالي من نوع شتورم ـ ليوفيل العادية. بتطبيق الشروط الحدية على الحل العام (2.31) للمعادلة التفاضلية نجد أن

$$c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,\ell - c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\ell = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,\ell + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\ell$$
$$\sqrt{\lambda}\,(c_1 \sin\sqrt{\lambda}\ell + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\ell) = \sqrt{\lambda}\,(-c_1 \sin\sqrt{\lambda}\ell + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\ell)$$

ونستنتج من ذلك أن

$$c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\ell = 0$$
$$\sqrt{\lambda}\,c_1 \sin\sqrt{\lambda}\ell = 0$$

فإذا استبعدنا الحل التافه $c_1 = c_2 = 0$ فإن هذا الزوج من المعادلات يكافىء المعادلة

$$\sqrt{\lambda}\,\sin\sqrt{\lambda}\ell = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

أي أن القيم الذاتية هي

$$0, \frac{\pi^2}{\ell^2}, \frac{4\pi^2}{\ell^2}, \frac{9\pi^2}{\ell^2}, \cdots$$

والدوال الذاتية هي

$$1, \cos\frac{\pi}{\ell}x, \sin\frac{\pi}{\ell}x, \cos\frac{2\pi}{\ell}x, \sin\frac{2\pi}{\ell}x, \cos\frac{3\pi}{\ell}x, \sin\frac{3\pi}{\ell}x, \cdots$$

وهي بالضرورة تامة في $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ بموجب النظرية (2.4). لاحظ في هذه المسألة أن كل قيمة ذاتية $\lambda_n = n^2\pi^2/\ell^2$ تقترن بدالتين ذاتيتين هما $\cos\frac{n\pi x}{\ell}$ و $\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ باستثناء القيمة الذاتية $\lambda_0 = 0$ ذات الدالة الذاتية $u_0 = 1$.

في كثير من الأحيان تأخذ المعادلة التفاضلية (2.29) الصورة

$$p(x)u'' + p'(x)u' + r(x)u + \lambda w(x)u(x) = 0\ ,\ a \le x \le b \qquad (2.32)$$

حيث w دالة متصلة وموجبة على [a,b]، تسمى **دالة الثقل** (weight function) أو **دالة القياس** (measure function). واضح أن الصيغة (2.32) لمعادلة شتورم - ليوفيل أكثر عمومية من سابقتها (2.29) حيث كانت $w(x) = 1$. وهذا التعميم له ما يبرره حيث تستوجب بعض التطبيقات الفيزيائية وجود الدالة w (راجع أيضا التمرين (2.3.6)). لاحظ أن λ في المعادلة (2.32) هي في حقيقة الأمر قيمة ذاتية للمؤثر

$$\frac{1}{w}L = \frac{p}{w}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{p'}{w}\frac{d}{dx} + \frac{r}{w}$$

لكننا سنتحدث عنها كقيمة ذاتية لمسألة شتورم ـ ليوفيل المكونة من المعادلة (2.32) بالشروط الحدية (2.30). وكذلك الأمر بالنسبة للدالة الذاتية u.

سيترتب على ظهور دالة الثقل w في معادلة شتورم ـ ليوفيل إعادة تعريف حاصل الضرب الداخلي بأنه

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)w(x)dx = \overline{\langle g,f\rangle} \qquad (2.33)$$

فتأخذ صيغة القياس الشكل

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left[\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx\right]^{1/2} \qquad (2.34)$$

وهذا يستوجب اعتبار فضاء حاصل الضرب الداخلي $\mathcal{L}^2(a,b)$ مكونا من الدوال $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ بحيث

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx < \infty$$

أو ، بعبارة أدق ، فإن $\mathcal{L}^2(a,b)$ هو انغلاق $C(a,b)$ بالنسبة للقياس (2.34) ، أي أن كل $f \in \mathcal{L}^2(a,b)$ هي نهاية (بالنسبة للقياس (2.34)) لمتتالية كوشي من عناصر $C(a,b)$. وسنستخدم الرمز $\mathcal{L}^2(a,b;w)$ ، بدلا عن $\mathcal{L}^2(a,b)$ ، عندما نرغب في تأكيد أو إبراز دور دالة الثقل w في تكوين فضاء الضرب الداخلي على (a,b).

لنفرض الآن أن

$$Lu + \lambda wu = 0 \quad , \quad Lv + \mu wv = 0$$

بالشروط الحدية المنفصلة (2.30). بما أن $L^* = L$ فإن

$$\begin{aligned}\lambda\|u\|^2 &= \langle \lambda u, u\rangle \\ &= \int_a^b (-\frac{1}{w(x)}Lu(x)\bar{u}(x)w(x)dx\end{aligned}$$

$$= -\int_a^b u(x)\overline{Lu}(x)dx$$
$$= \int_a^b u(x)\bar{\lambda}w(x)\bar{u}(x)dx$$
$$= \bar{\lambda}\|u\|^2$$
$$\Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda \quad \forall u \neq 0$$

كما أن

$$(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle - \langle u, \mu v\rangle$$
$$= -\left\langle \frac{1}{w} Lu, v\right\rangle + \left\langle u, \frac{1}{w} Lv\right\rangle$$
$$= 0$$
$$\Rightarrow \langle u,v\rangle = 0 \quad \forall \ \lambda \neq \mu$$

أي أن القيم الذاتية للمعادلة $Lu + \lambda wu = 0$ حقيقيـة والدوال الذاتية المناظرة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة في $\mathcal{L}^2(a,b;w)$.

وبالمثل فإن بقية استنتاجات النظرية (2.4) تظل صحيحة بعد إدخال دالة الثقل w إلى مسألة شتورم ـ ليوفيل بشرط استخدام التعريف (2.33) لحاصل الضرب الداخلي في $\mathcal{L}^2(a,b;w)$.

نتيجة (2.4.1)

لمسألة شتورم ـ ليوفيل

$$Lu + \lambda wu = 0 \quad , \quad a \leq x \leq b$$
$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$$
$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$$

حيث $L^* = L$ و w دالة متصلة وموجبة على $[a,b]$، عدد غير منته من القيم الذاتية الحقيقية $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ والدوال الذاتية المتعامدة $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ التي تحقق الخواص المذكورة في نظريتي (2.3) و (2.4).

مثـال (2.8)

(i) أوجد القيم والدوال الذاتية للمسألة الحدية

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x} y = 0 \quad , \quad 1 < x < b$$

$$y(1) = y(b) = 0$$

(ii) أوجد منشور الدالة $g(x) = 1$ على $[1,b]$ بدلالة الدوال الذاتية.

الحـــل

(i) لإيجاد حل المعادلة التفاضلية ، نلاحظ (بعد الضرب في x) أن

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$

على صيغة معادلة كوشي - أويلر، وبوضع $y = x^m$ نحصل على

$$m(m-1)x^m + mx^m + \lambda x^m = 0$$

$$m^2 + \lambda = 0$$

$$m = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$x^{i\sqrt{\lambda}} = e^{i\sqrt{\lambda}\,\ln x} = \cos(\sqrt{\lambda}\,\ln x) + i\sin(\sqrt{\lambda}\,\ln x)$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}\,\ln x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}\,\ln x)$$

$$y(1) = c_1 = 0$$

$$y(b) = c_2\sin(\sqrt{\lambda}\,\ln b) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\,\ln b = n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

وبذلك نحصل على القيم الذاتية

$$\lambda_n = n^2\pi^2 / (\ln b)^2 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

والدوال الذاتية

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ln b}\ln x\right)$$

لاحظ أن المسألة الحدية المعطاة من نوع شتورم - ليوفيل فيها $p(x) = x$، $r(x) = 0$، ودالة الثقل $w(x) = \frac{1}{x}$. فنتوقع أن $u_n \perp y_m$ لكل $n \neq m$، وهذا ما تؤكده الحسبة التالية:

$$\begin{aligned}\langle y_n, y_m\rangle &= \int_1^b \sin\left(\frac{n\pi}{\ln b}\ln x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\ln b}\ln x\right)\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{\ln b}{\pi}\int_0^\pi \sin n\xi \sin m\xi d\xi \\ &= 0 \quad \forall \; n \neq m\end{aligned}$$

(ii) من نظرية (2.4) نعلم أن المجموعة $\left\{y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ln b}\ln x\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ تامة في $\mathcal{L}^2(1, b; 1/x)$، وبالتالي فإن

$$g(x) = \sum_1^\infty \frac{\langle g, y_n\rangle}{\|y_n\|^2} y_n(x) \quad \forall \; g \in \mathcal{L}^2(1, b; 1/x)$$

في حالة $g(x) = 1$ لدينا

$$\begin{aligned}\langle 1, y_n\rangle &= \int_1^b \sin\left(\frac{n\pi}{\ln b}\ln x\right)\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{\ln b}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\end{aligned}$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{\ln b}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 n\xi d\xi = \frac{1}{2}\ln b$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 1 &= \sum_1^\infty \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ln b}\ln x\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{\ln b}\ln x\right], \quad 1 < x < b\end{aligned}$$

لاحظ أن الطرف الأيمن يساوي 0 عند النقطتين $x = 1$ و $x = b$ (وهي الشروط الحدية على y_n)، مما يدل على أن المساواة على $[1,b]$ ليست نقطية وإنما في $\mathcal{L}^2(1, b; 1/x)$.

تمــــارين (2.4)

(1) أوجد القيم والدوال الذاتية للمسألة

$$u'' + \lambda u = 0 \quad , \quad a \leq x \leq b$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

(2) تحقق من أن $p(f'g - fg')\Big|_a^b = 0$ إذا كانت كل من f و g تحقق الشروط الحدية المنفصلة (2.30).

(3) متى تظل النظرية (2.4) صحيحة إذا كانت الشروط الحدية على المعادلة (2.29) هي الشروط الدورية

$$u(a) = u(b) \quad , \quad u'(a) = u'(b)$$

بدلا عن الشروط المنفصلة (2.30)؟

(4) افرض أن $py'' + qy' + ry + \lambda wy = 0$ على $[a,b]$، حيث $p(x) > 0$. حوِّل هذه المعادلة، بعد الضرب في دالة مناسبة، إلى الصيغة $\tilde{p}y'' + \tilde{p}'y' + \tilde{r}y + \lambda\tilde{w}y = 0$ حيث تحقق $\tilde{w}$ الشروط اللازمة في دالة الثقل، على اعتبار أن w دالة ثقل في المعادلة الأصلية.

(5) ضع كلا من المعادلات التفاضلية التالية في صورة شتورم ـ ليوفيل وعيِّن دالة الثقل في كل معادلة:

(i) $x^2 u'' + \lambda u = 0 \quad , \quad x > 0$

(ii) $\sin x\, u'' + \cos x\, u' + \lambda \sin x\, u = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi$

(iii) $u'' - u' + \lambda u = 0$

(iv) $u'' - x^2 u' + \lambda u = 0$

(6) عين الشروط الحدية التي تجعل $p(f'g - fg')\Big|_a^b = 0$ من بين الشروط التالية:

(i) $p(x) = 1,\ a \le x \le b\ ,\ u(a) = u(b)\ ,\ u'(a) = u'(b)$

(ii) $p(x) = x\ ,\ 0 < a \le x \le b\ ,\ u(a) = u'(b) = 0$

(iii) $p(x) = \sin x\ ,\ 0 \le x \le \pi/2\ ,\ u(0) = 1\ ,\ u(\pi/2) = 0$

(iv) $p(x) = e^{-x}\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ u(0) = u(1)\ ,\ u'(0) = u'(1)$

(v) $p(x) = x^2\ ,\ 0 < x < b\ ,\ u'(0) = u(b)\ ,\ u'(b) = u(b)$

(vi) $p(x) = x^2\ ,\ 0 < x < b\ ,\ u'(0) = u(b)\ ,\ u'(b) = u(0)$

(vii) $p(x) = x^2\ ,\ -1 < x < 1\ ,\ u(-1) = u(1)\ ,\ u'(-1) = u'(1)$

(7) في تمرين (2.4.6) حدد الشروط التي تعين مسألة شتورم - ليوفيل الشاذة.

(8) أوجد القيم والدوال الذاتية للمسألة

$$[(x+3)^2\, y']' + \lambda y = 0 \quad , \quad -2 \le x \le 1$$

$$y(-2) = y(1) = 0$$

(9) افرض أن

$$(pu')' + ru + \lambda u = 0 \quad , \quad a < x < b$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

(i) أثبت أن

$$\lambda \int_a^b |u|^2\, dx = \int_a^b p|u'|^2\, dx - \int_a^b r|u|^2\, dx$$

(ii) إذا كانت $p(x) \ge 0$ ، $r(x) \le c$ فأثبت أن $\lambda \ge -c$.

(2.5) مسألة شتورم - ليوفيل الشاذة

في معادلة شتورم - ليوفيل

$$(p'u)' + ru + \lambda wu = 0 \quad , a < x < b$$

افترضنا حتى الآن أن $p(x) > 0$ وأن $w(x) > 0$ على الفترة المحدودة المغلقة $[a,b]$، وسيترتب على الإخلال بواحد أو أكثر من هذه الشروط أن تتحول المسألة إلى ما يعرف بالنوع الشاذ. في هذا الصدد سننظر في المسائل الشاذة التي تنشأ من الأوضاع التالية :

(i) $p(x) = 0$ عند $x = a$ أو $x = b$ أو كلاهما.

(ii) الفترة (a,b) غير محدودة.

في الحالة الأولى نجد أن المساواة

$$p(f'\,\bar{g} - f\,\bar{g}')\Big|_a^b = 0 \qquad (2.35)$$

تتحقق عند الطرف الذي تختفي $p(x)$ عنده دون فرض شرط حدّي على الحل عند ذلك الطرف. أي أننا لا نحتاج إلى شروط حدية إذا كان $p(a) = p(b) = 0$ على سبيل المثال، ويكفي أن نشترط وجود النهايتين $\lim_{x\to a} u(x)$ و $\lim_{x\to b} u(x)$ لضمان تحقق المساواة (2.35). أما في الحالة الثانية، عندما تصبح الفترة (a,b) غير محدودة، فمن الطبيعي أن نفترض أن الدالة $u(x)$ تؤول إلى 0 عندما $|x|\to\infty$، إذ أن u تقع في $\mathscr{L}^2(a,b)$.

ومن الأمثلة المشهورة لمسألة شتورم - ليوفيل الشاذة :

(i) **معادلة لوجاندر** (Legendre)

$$(1 - x^2)u'' - 2xuy' + n(n+1)u = 0 \quad , -1 < x < 1$$

حيث نرى أن $\lambda = n(n+1)$ وأن الدالة $p(x)=1 - x^2$ تساوي الصفر عند $x = \pm 1$ فلا نحتاج إلى شروط حدية على الحل.

(ii) **معادلة هرميت** (Hermite)

$$u'' - 2x\,u' + 2n\,u = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

التي تتحول، بعد الضرب في e^{-x^2}، إلى الصيغة القياسية

$$e^{-x^2} u'' - 2x\,e^{-x^2} u' + 2n\,e^{-x^2} u = 0$$

حيث $p(x) = e^{-x^2}$ ، $\lambda = 2n$ ، $w(x) = e^{-x^2}$.

(iii) **معادلة لاقير** (Laguerre)

$$xu' + (1-x)u' + nu = 0 \quad , \quad x > 0$$

التي تتحول، بعد الضرب في e^{-x}، إلى الصيغة القياسية

$$xe^{-x} u'' + (1-x)e^{-x} u' + ne^{-x} u = 0$$

حيث $p(x) = xe^{-x}$ تساوي الصفر عندما $x = 0$.

(iv) **معادلة بيسل** (Bessel)

$$xu'' + y' - \frac{n^2}{x} u + \lambda xu = 0 \quad , \quad x > 0$$

حيث تختفي كل من الدالتين $p(x) = x$ و $w(x) = x$ عند $x = 0$، وتظهر هنا الدالة $r(x) = -n^2 / x$

تشكل حلول هذه المعادلات نماذج مما يعرف **بالدوال الخاصة**، وسنخصص الفصل الرابع لدراسة حلول المعادلات الثلاث الأولى، أما معادلة بيسل فسنتطرق إليها في الفصل الخامس. وهكذا نرى أن مسألة شتورم ـ ليوفيل الشاذة مصدر غني بالمعادلات والدوال الخاصة ذات الدلالة الكبيرة في كثير من التطبيقات الفيزيائية.

الفصل الثالث

سلاسل فوريير

توصلنا في الفصل الثاني إلى أن كلا من مجموعة الدوال المتعامدة $\{\cos nx : n\in\mathbb{N}_0\}$ و $\{\sin nx : n\in\mathbb{N}\}$ تامة في $\mathcal{L}^2(0,\pi)$. سنتابع هذا الخط ونبيِّن في هذا الفصل أن اتحاد هاتين المجموعتين يعطينا مجموعة تامة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ ، فنتوصل من خلال ذلك إلى نظرية فوريير الأساسية في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ ، التي نقدمها في البند الأول من هذا الفصل ، وهي التي تسمح بنشر أي دالة f في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ بمتسلسلة من النوع

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (3.1)$$

تسمى **متسلسلة فورييه**، نسبة إلى الفيزيائي الفرنسي Joseph Fourier (1768-1830) الذي رافق حملة نابليون على مصر في أواخر القرن الثامن عشر، وألف كتابا بعنوان "النظرية التحليلية للحرارة"، نشر في عام 1822 ، واستخدم فيه نماذج من هذه المتسلسلات.

تفهم المساواة بين الدالة f والمتسلسلة (3.1) بطبيعة الحال على أنها في $\mathcal{L}^2$ ، لكنها تظل صحيحة نقطيًا تحت شروط معينة على الدالة f كما سنوضح في البند الثاني من هذا الفصل.

(3.1) سلاسل فورييه في $\mathcal{L}^2$

باستخدام النظرية (2.4) توصلنا في مثال (2.6) إلى أن متتالية الدوال

$$1,\cos\frac{\pi}{\ell}x,\cos\frac{2\pi}{\ell}x,\ldots,\cos\frac{n\pi}{\ell}x,\ldots$$

متعامدة على $[0,\ell]$ وتامة في $\mathcal{L}^2(0,\ell)$. وهذا يعني، بموجب التعريف (1.8)، أن أي دالة f في $\mathcal{L}^2(0,\ell)$ قابلة للتمثيل بالمتسلسلة

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f,\cos\frac{n\pi}{\ell}x\rangle}{\left\|\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right\|^2}\cos\frac{n\pi}{\ell}x \qquad (3.2)$$

كما توصلنا، في المثال (2.6) نفسه، إلى أن المتتالية

$$\sin\frac{\pi}{\ell}x,\sin\frac{2\pi}{\ell}x,\ldots,\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\ldots$$

المتعامدة على $[0,\ell]$ أيضا تامة في $\mathcal{L}^2(0,\ell)$، فنحصل على تمثيل آخر للدالة f

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle f,\sin\frac{n\pi}{\ell}x\rangle}{\left\|\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\|^2}\sin\frac{n\pi}{\ell}x \qquad (3.3)$$

حيث نذكّر بأن الرمز $\doteq$ في المعادلتين (3.2) و (3.3) يدل على أن المساواة في $\mathcal{L}^2(0,\ell)$ وليست بالضرورة محققة عند كل نقطة في $[0,\ell]$.

لدينا الآن

$$\|1\|^2 = \int_0^{\ell}dx = \ell$$

$$\left\|\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right\|^2 = \int_0^{\ell}\cos^2\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \ell/2$$

$$\left\|\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\|^2 = \int_0^{\ell}\sin^2\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \ell/2 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

وبالتعريف

$$a_0 = \langle f,1\rangle \div \|1\|^2 = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx \qquad (3.4)$$

$$a_n = \langle f,\cos\frac{n\pi}{\ell}x\rangle \div \left\|\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right\|^2 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \qquad (3.5)$$

$$b_n = \langle f, \sin\frac{n\pi}{\ell}x\rangle \div \left\|\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\|^2 = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \qquad (3.6)$$

نرى أن (3.2) و (3.3) تأخذ الشكل

$$f(x) \doteq a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x \quad , \quad 0 \le x \le \ell \qquad (3.7)$$

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x \quad , \quad 0 \le x \le \ell \qquad (3.8)$$

بما أن الطرف الأيمن في كل من المعادلتين (3.7) و (3.8) قابل للتمديد من $[0,\ell]$ إلى $[-\ell,\ell]$، الأول كدالة زوجية والثاني كدالة فردية، وبما أن أي دالة $f \in \mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ هي مجموع مركبتيهما الزوجية $\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ والفردية $\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ ، فمن المتوقع أن تكون الدالة f قابلة للتمثيل بالمجموع $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x$ ، حيث

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]dx = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \qquad (3.9)$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \quad (3.10)$$

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \quad (3.11)$$

وهذا ما تؤكده نتيجة المثال (2.7) حيث توصلنا إلى أن المجموعة $\left\{1, \cos\frac{n\pi}{\ell}x, \sin\frac{n\pi}{\ell}x : n \in \mathbb{N}\right\}$ تامة في $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ لأنها تشكل الدوال الذاتية للمؤثر $\frac{d^2}{dx^2}$ القرين لذاته بالشروط الدورية $u(-\ell)=u(\ell)$ ، $u'(-\ell)=u'(\ell)$. إذن

$$f(x) \doteq a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x) \qquad \forall f \in \mathcal{L}^2(-\ell,\ell) \quad (3.12)$$

يمثل الطرف الأيمن من المعادلة (3.12) منشور الدالة f بدلالة الـدوال المثلثية $\cos\frac{n\pi}{\ell}x$ و $\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ ، ويطلق عليه **منشور فورييه**، أو **متسلسلة فورييه**، للدالـة f في $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ وتسمى المعادلات a_n و b_n المعطاه بالصيغ (3.9)، (3.10) و (3.11) **معاملات فورييه**.

بذلك نكون قد أثبتنا نظرية فورييه في الفضاء $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$.

نظريــة (3.1)

مجموعة الدوال $\left\{1,\cos\frac{n\pi}{\ell}x,\sin\frac{n\pi}{\ell}x: n\in\mathbb{N}\right\}$ تامة في $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ ، بمعنـى أن لكل $f\in\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ فإن

$$f(x) \doteq a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x+b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x) \quad , \ -\ell\le x\le \ell \qquad (3.13)$$

حيث

$$a_0=\|1\|^{-2}\langle f,1\rangle=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx \qquad (3.14)$$

$$a_n=\left\|\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right\|^{-2}\langle f,\cos\frac{n\pi}{\ell}x\rangle=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \qquad (3.15)$$

$$b_n=\left\|\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right\|^{-2}\langle f,\sin\frac{n\pi}{\ell}x\rangle=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \ , \ n\in\mathbb{N} \qquad (3.16)$$

ملحوظات

(1) إذا كانت الدالة f زوجية فإن

$$a_0=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}xdx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

$$b_n=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

فنحصل على التمثيل

$$f(x) \doteq a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x$$

(2) إذا كانت f فردية فإن

$$a_0 = a_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

فنحصل على

$$f(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

(3) تقـارب المتسلسـلة $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x)$ مـــن f(x) هو تقارب في $\mathscr{L}^2(-\ell,\ell)$ ، ليس بالضرورة نقطيا، ويعني أن

$$\left\|f - \left[a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x)\right]\right\|^2$$

$$= \|f\|^2 - \ell\left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right] \to 0$$

عندما $N \to \infty$ ، كما سبق أن عرضنا في البند (1.5). وهذا التقـارب يقتضـي أن $a_n \to 0$ وأن $b_n \to 0$

(4) إذا كان تقارب متسلسلة فوريير

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x)$$

منتظما على $[-\ell, \ell]$ ، فمن النتيجة (1.1.1) تكون الدالة التي تمثلها متصلة على $[-\ell,\ell]$ ، وتصبح المساواة (3.13) نقطية.

إذا كانت الدالة f حقيقية فإن معاملات فوريير الخاصة بها أعداد حقيقية. أما إذا كانت f دالة مركبة فإن هذه المعاملات تصبح مركبة، ومن الصيغ (3.14) إلى (3.16)

نستنتج أن الجزء الحقيقي (أو التخيلي) لكل معامل هو المعامل المناظر للدالة Re f (أو Im f)، أي أن

$$\operatorname{Re} a_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{Re} f(x)dx \quad , \quad \operatorname{Im} a_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{Im} f(x)dx$$

$$\operatorname{Re} a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{Re} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \, , \operatorname{Im} a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{Im} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

$$\operatorname{Re} b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{Re} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \, , \operatorname{Im} b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{Im} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

وبعبارة أخرى فإن النظرية (3.1) صحيحة سواء كان الفضاء $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ حقيقيًّا أم مركبًا.

من جهة أخرى فإن علاقة أويلر

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}$$

تسمح لنا بصياغة النظرية (3.1) بدلالة الدوال الأسية المركبة $e^{in\pi x/\ell}$ ، بدلا عن الدوال المثلثية $\cos\frac{n\pi}{\ell}x$ و $\sin\frac{n\pi}{\ell}x$ ، وذلك بإعادة تعريف معاملات فورير على النحو التالي

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-in\pi x/\ell}dx$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{in\pi x/\ell}dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

بحيث نحصل على الصيغة الأسية لمتسلسلة فورير

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x) =$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(c_n + c_{-n})\cos\frac{n\pi}{\ell}x + i(c_n - c_{-n})\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right]$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{in\pi x/\ell} + c_{-n}e^{-in\pi x/\ell})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/\ell}$$

حيث تشكل الدوال $\{e^{in\pi x/\ell} : n\in\mathbb{Z}\}$ مجموعة متعامدة في $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ (تمرين 3.1.1). بذلك نحصل على صيغة أخرى لنظرية (3.1):

نتيجة (3.1.1)

مجموعة الدوال $\{e^{in\pi x/\ell} : n\in\mathbb{Z}\}$ تامة في $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ ، بمعنى أن لكل $f\in\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ فإن

$$f(x) \doteq \sum_{n-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/\ell} \tag{3.17}$$

حيث

$$c_n = \left\|e^{-in\pi x/\ell}\right\|^{-2}\langle f, e^{-in\pi x/\ell}\rangle = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-in\pi x/\ell}dx \,, n\in\mathbb{Z} \tag{3.18}$$

مثـال (3.1)

لتكن f دالة معرفة على الفترة $[-\pi,\pi]$ على النحو التالي

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

واضح أن f تنتمي إلى الفضاء $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ ، وللحصول على مفكوك فورير لهذه الدالـة نحسب معاملات فورير ، فنلاحظ أن

$$a_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

لأن f دالة فردية ، ومن المعادلة (3.6) نجد أن

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

شكل (3.1)

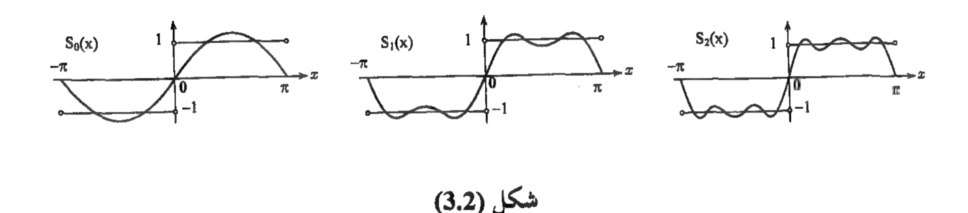
أي أن b_n تساوي $\frac{4}{n\pi}$ عندما يكون n عددًا فرديًّا وتساوي 0 عندما يكون n عددًا زوجيًّا، وتؤول إلى 0 كما هو متوقع عندما $n \to \infty$. بذلك نحصل على

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ &= b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + b_5 \sin 5x + \ldots \\ &= \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x \quad , \; -\pi \le x \le \pi \end{aligned}$$

لاحظ تقارب المجاميع الجزئية

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x$$

لمتسلسلة فوريير من f(x) بيانيًّا في الشكل (3.2).



شكل (3.2)

لاحظ أيضا أن المتسلسلة

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x$$

تساوي الصفر عند النقاط $x = -\pi$، $x = 0$، $x = \pi$ بينما $f(-\pi) = -1$، $f(0) = f(\pi) = 1$، مما يؤكد أن المساواة $f(x) \doteq S(x)$ في $\mathcal{L}^2(-l,l)$ ليست نقطية على $[-\pi,\pi]$.

للحصول على الصيغة الأسية لمتسلسلة فوريير التي تمثل الدالة f ، ما علينا إلا حساب المعاملات c_n على أساس الصيغة (3.18):

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{-inx}dx - \int_{-\pi}^{0} e^{-inx}dx\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(e^{-inx} - e^{inx})dx\\ &= \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\, dx\\ &= -\frac{i}{n\pi}(1-\cos n\pi)\ ,\ n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

ومن الصيغة (3.17) نحصل على

$$f(x) \doteq \frac{-i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}[1-(-1)^n]e^{inx}\ ,\ -\pi \le x \le \pi$$

وبالإمكان التحقق من صحة المساواة (تمرين (3.1.2))

$$\frac{-i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}[1-(-1)^n]e^{inx} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x \quad (3.19)$$

تمارين (3.1)

(1) تحقق من تعامد المجموعة $\{e^{in\pi x/l} : n \in \mathbb{Z}\}$ في $\mathcal{L}^2(-l,l)$.

(2) أثبت صحة المساواة (3.19).

(3) هل المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x$ متقاربة بانتظام ، ولماذا؟

(4) أوجد مفكوك فوريير للدالة الثابتة $f(x) = 1$ على $[-\pi,\pi]$.

(5) أوجد مفكوك فوريير للدالة المعرفة على $[-1,1]$ بالقاعدة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

(6) أوجد مفكوك فورير في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ للدالة $f(x) = \pi - |x|$، وأثبت أن تقاربه منتظم.

(7) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة فأثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ تمثل دالة متصلة على $[-\pi,\pi]$.

(8) أثبت أن المتسلسلة $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ تمثل دالة في $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ متقاربة.

(3.2) التقارب النقطي لسلاسل فورير

نقول عن الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ إنها **دورية** (periodic) إذا وجد عدد موجب p بحيث

$$f(x + p) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{3.20}$$

ويسمى p عندئذ **دور** (period) الدالة f. لاحظ أن العلاقة (3.20) تقود إلى

$$f(x + np) = f(x + (n-1)p + p) = f(x + (n-1)p) = \cdots = f(x)$$
$$f(x - np) = f(x - np + p) = f(x - (n - 1)p) = \cdots = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

مما يعني أن أي مضاعف صحيح للدور p هو دور آخر للدالة f. لكننا عندما نتحدث عن دور الدالة فإننا غالبا ما نقصد أصغر عدد موجب p يحقق المساواة (3.20). فعلى سبيل المثال دور الدالة sin x والدالة cos x هو 2π، بينما دور الدالة $\sin\frac{\pi}{\ell}x$ أو $\cos\frac{\pi}{\ell}x$ هو 2ℓ. أما الدالة الثابتة فإن كل عدد موجب هو دور لها.

إذا كانت المتسلسلة

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.21}$$

متقاربة على $\mathbb{R}$ فمن الواضح أنها تمثل دالة دورية في 2π لأن 2π هو الدور المشترك لجميع حدودها. وقد وجدنا في البند السابق أن اختيار المعاملات في هذه المتسلسلة بالشكل

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

حيث f أي دالة في $\mathscr{L}^2(-\pi,\pi)$ ، يقود إلى أن

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \xrightarrow{\mathscr{L}^2} f(x) \qquad (3.22)$$

ونريد الآن أن نبحث في إمكانية وشروط تحقق التقارب $S_n(x) \to f(x)$ **نقطيًا** على $[-\pi,\pi]$ ، ومن ثم على $\mathbb{R}$ بعد توسيع تعريف f من $[-\pi,\pi]$ إلى $\mathbb{R}$ بالامتداد الدوري

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

بعبارة أخرى، إذا كانت f دالة دورية، فمتى يمكن تمثيلها نقطيًا بمتسلسلة من النوع (3.21)؟ للإجابة على هذا السؤال سنبدأ ببعض التعريفات.

تعريف (3.1)

(1) نقول إن الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ **متصلة قِطَعِيًّا** (piecewise continuous) على $[a,b]$ إذا كانت

(i) متصلة على $[a,b]$ باستثناء عدد منته من النقاط $\{x_1, \dots, x_n\}$.

(ii) نهايتاها اليمنى واليسرى

$$\lim_{x\to x_i^-} f(x) = f(x_i^-) \quad , \quad \lim_{x\to x_i^+} f(x) = f(x_i^+)$$

موجودتين عند كل x_i باستثناء النقطتين a و b حيث يشترط وجود $f(a^+)$ و $f(b^-)$ فقط.

(2) تكون الدالة $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ **ملساء قطعيًّا** (piecewise smooth) على $[a,b]$ إذا كانت كل من f و f' متصلة قطعيًّا على $[a,b]$.

(3) تكون الدالة المعرفة على فترة غير محدودة متصلة (ملساء) قطعيًّا إذا كانت متصلة (ملساء) قطعيًّا على كل فترة جزئية محدودة من مجال تعريفها.

لاحظ أن الدالة المتصلة على $[a,b]$ تكـون متصلـة قطعيًّا علـى $[a,b]$، ولكنهـا قد لا تكون ملساء قطعيًّا، مثل الدالة

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\ 0\leq x\leq 1$$

حيث إن النهايـة اليمنى للمشتقة $f'(x)$ لا توجد عنـد 0. ومـن جهـة أخرى فـإن الدالـة الملساء قطعيًّا قد لا تكون متصلة، مثل الدالة المعطاة في المثال (3.1).

تعرف النتيجة التالية **بنظرية فورييه الأساسية**.

نظرية (3.2)

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ دالة دورية في 2π وملساء قطعيًّا على $\mathbb{R}$. إذا كان

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\ ,\ n\in\mathbb{N}$$

فإن المتسلسلة

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

متقاربة عند كل $x\in\mathbb{R}$ من $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

ملحوظات

(1) إذا كانت x نقطة اتصال للدالـة f فإن $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=f(x)$ وتتقـارب المتسلسلة من $f(x)$، وإذا كـانت x نقطـة عـدم اتصـال فإن التقـارب يكـون من متوسط "القفزة" في قيمة الدالة عند x.

(2) بما أن كل دالة متصلة قطعيًّا على $[-\pi,\pi]$ تنتمي إلى $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ (انظر تمرين 3.2.1) فـإن $a_n\to 0$، $b_n\to 0$ عندما $n\to\infty$ (راجـع الملاحظـة (3) على النظرية (3.1)).

(3) باستخدام الصيغة الأسية لمتسلسلة فورييه نحصل على التمثيل

$$\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

لأي دالة f تحقق شروط النظرية (3.2)، حيث

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$$

كما أن $c_n \to 0$ عندما $n\to\pm\infty$ لأي دالة متصلة قطعيًا على $[-\pi,\pi]$.
وسنستخدم هذه الصيغة لإثبات النظرية (3.2).

برهان النظرية

لتكن

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}\\&=\sum_{k=-n}^{n}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt\right]e^{ikx}\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}e^{ik(x-t)}dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}e^{ik(t-x)}dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi+x)\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}e^{ik\xi}d\xi\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi+x)D_n(\xi)d\xi \qquad (3.23)\end{aligned}$$

حيث يدل الرمز $D_n(\xi)$ على المجموع $\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}e^{ik\xi}$ الذي يسمى **نواة ديريشليه** (Dirichlet kernel)، نسبة إلى الرياضي الألماني **لوجان ديريشليه** (1805-1859) Lejeune Dirichlet. لاحظ أن

$$D_n(\xi)=\frac{1}{2\pi}(e^{-in\xi}+e^{-i(n-1)\xi}+\cdots+e^{i(n-1)\xi}+e^{in\xi})$$
$$=\frac{1}{2\pi}e^{-in\xi}(1+e^{i\xi}+\cdots+e^{i2n\xi})$$
$$=\frac{1}{2\pi}e^{-in\xi}\,\frac{1-e^{i(2n+1)\xi}}{1-e^{i\xi}}$$

9/2π

D_4

−π π

شكل (3.3)

من جهة أخرى فإن علاقة أويلر تعطي

$$D_n(\xi)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}2\cos k\xi$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi}D_n(\xi)d\xi=\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin k\xi\right)\Big|_0^{\pi}=1/2 \qquad (3.24)$$

وبما أن $D_n(\xi)$ دالة زوجية فإن $\int_{-\pi}^{0}D_n(\xi)d\xi=1/2$ أيضا. بذلك نحصل على

$$\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=f(x^+)\int_0^{\pi}D_n(\xi)d\xi+f(x^-)\int_{-\pi}^{0}D_n(\xi)d\xi$$

وباستخدام المعادلتيين (3.23) و (3.24) نرى أن

$$S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=\int_{-\pi}^{0}[f(x+\xi)-f(x^-)]D_n(\xi)d\xi$$
$$+\int_0^{\pi}[f(x+\xi)-f(x^+)]D_n(\xi)d\xi$$

وبالتعريف

$$g(\xi)=\begin{cases}\dfrac{f(x+\xi)-f(x^-)}{e^{i\xi}-1} & -\pi<\xi<0\\[2mm] \dfrac{f(x+\xi)-f(x^+)}{e^{i\xi}-1} & 0<\xi<\pi\end{cases}$$

فإن

$$S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=\int_{-\pi}^{\pi}g(\xi)(e^{i\xi}-1)D_n(\xi)d\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\xi)(e^{i(n+1)\xi}-e^{-in\xi})d\xi \qquad (3.25)$$

بما أن f ملساء قطعيًّا على $[-\pi,\pi]$ فإن g أيضا ملساء قطعيًّا على $[-\pi,\pi]$ باستثناء النقطة $\xi=0$، حيث (باستخدام قاعدة لوبيتال)

$$\lim_{\xi\to 0^\pm}g(\xi)=\lim_{\xi\to 0^\pm}\frac{f'(x+\xi)}{ie^{i\xi}}=-if'(x^\pm)$$

فنستنتج أن g متصلة قطعيا على الفترة $[-\pi,\pi]$ بكاملها. ومن الملحوظة (3) أعلاه نرى أن معاملات فوريير للدالة g تحقق

$$\lim_{n\to\pm\infty}c_n=\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\xi)e^{-in\xi}d\xi=0$$

بالرجوع إلى المعادلة (3.25) نخلص الآن إلى أن

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\xi)(e^{i(n+1)\xi}-e^{-in\xi})d\xi=0 \qquad \square$$

وكما هو متوقع، فإن للنظرية (3.2) تعميمًا يعالج حالة الدالة الدورية في 2ℓ بدلا عن 2π.

نتيجة (3.2.1)

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ دالة دورية في 2ℓ وملساء قطعيا على $\mathbb{R}$. إذا كان

$$a_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

فإن المتسلسلة

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

متقاربة عند كل $x \in \mathbb{R}$ من $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

البرهان

بتعريف الدالة $g(x) = f(\frac{\ell x}{\pi})$ نرى أن $g(x + 2\pi) = g(x)$ وأن g تحقق شروط النظرية (3.2) وتقود إلى النتيجة المطلوبة.

بالرجوع إلى المثال (3.1) نلاحظ أن $x = 0$ نقطة عدم اتصال للدالة f وأن

$$\frac{1}{2}[f(0^+ + f(0^-)] = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

بما يتفق مع قيمة متسلسلة فوريير

$$S(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$$

عند $x = 0$. وبما أن $x = \pi/2$ نقطة اتصال للدالة فإن

$$f(\frac{\pi}{2}) = S(\frac{\pi}{2})$$
$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(-1)^n$$

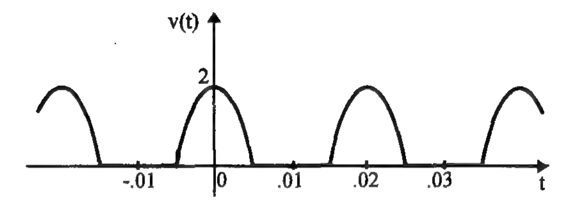
فنحصل بذلك على إحدى المتسلسلات التي تمثل العدد π

$$\pi = 4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...)$$

لأي دالة حقيقية f سنستخدم f^+ للدلالة على الجزء الموجب من الدالة ، أي أن $f^+(x)$ تساوي $f(x)$ حيثما كانت $f(x) \geq 0$ وتساوي 0 حيثما كانت $f(x) < 0$.
بعبارة أخرى ، $f^+(x) = \frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$.

مثال (3.2)

أوجد منشور فوريير للدالة
$v(t) = (2\cos 100\,\pi t)^+$
الموضحة في الشكل (3.2).



شكل (3.4)

ملحوظة: تمثل الدالة v(t) التوتر الكهربائي (voltage) الذي ينشأ بفعل مرور تيار متردد عبر صمام كهربائي.

الحـــل

نحصل على الدور 2ℓ من المساواة

$$\frac{\pi}{\ell} = 100\pi$$
$$\Rightarrow \quad \ell = 1/100$$

بما أن v دالة زوجية فإن $b_n = 0$ لكل n. كما أن

$$a_0 = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} v(t)dt$$
$$= \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} v(t)dt$$
$$= 100\int_0^{1/200} 2\cos 100\pi t\, dt$$
$$= 2/\pi$$
$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} v(t)\cos\frac{n\pi}{\ell}t\, dt \qquad \forall n \geq 1$$

$$= 200\int_0^{1/200} 2\cos 100\pi t \cos 100 n\pi t \, dt$$

$$= 200\int_0^{1/200} [\cos(n+1)100\pi t + \cos(n-1)100\pi t]dt$$

$$a_1 = 200\int_0^{1/200} (\cos 200\pi t + 1)dt = 1$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)100\pi t + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)100\pi t\right]_0^{1/200} \qquad \forall n \geq 2$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)\cos n\frac{\pi}{2}$$

$$= -\frac{4}{\pi(n^2-1)}\cos n\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{4}{3\pi} \qquad a_3 = 0$$

$$a_4 = -\frac{4}{15\pi} \qquad a_5 = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$v(t) = \frac{2}{\pi} + \cos 100\pi t + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 200\pi t - \frac{1}{15}\cos 400\pi t + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \cos 100\pi t - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos 200 n\pi t$$

لاحظ أن هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام (باختبار فايرشتراس)، بما يتفق مع كون الدالة v متصلة، فكل متسلسلة متقاربة بانتظام تكون نهايتها متصلة إذا كانت حدودها متصلة (راجع الفقرة (i) من النتيجة (1.1.1)). أما العكس فليس بالضرورة صحيحًا بصفة عامة، فعلى سبيل المثال نعلم أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ متقاربة على $(-1,1)$ حيث تمثل الدالة المتصلة $\frac{1}{1-x}$ ، لكن تقارب المتسلسلة ليس منتظمًا على هذه الفترة. أما إذا كانت المتسلسلة من نوع فورييه فإن لدينا النتيجة التالية :

نظرية (3.3)

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[-\pi,\pi]$ بحيث $f(-\pi) = f(\pi)$ ، وكانت f' متصلة قطعيًّا على $[-\pi,\pi]$ فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad (3.26)$$

متقاربة ، حيث a_n و b_n هي معاملات فورىير للدالة f

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \ , \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

جدير بالملاحظة ، قبل برهان هذه النظرية ، أن الشروط المفروضة على الدالة f في هذه النظرية هي الشروط ذاتها المفروضة على الدالة الدورية في النظرية (3.2) مضافًا إليها شرط الاتصال على $[-\pi,\pi]$.

البرهان

بما أن f' متصلة قطعيًّا فهي تنتمي إلى $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ فتكون كل من المعاملات

$$a_0' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx \ , \ a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nxdx \ , \ n \in \mathbb{N}$$

موجودة. وبما أن f متصلة وتحقق $f(-\pi) = f(\pi)$ فإن

$$a_0' = \frac{1}{2\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0$$

$$a_n' = \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -na_n$$

$$\Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^{N}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sqrt{a_n'^2 + b_n'^2}$$

$$\leq \left[\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{N}(a_n'^2+b_n'^2)\right]^{1/2}$$

حيث نحصل على العلاقة الأخيرة باستخدام متراجحة كوشي (1.5). ومن متراجحة بيسل (1.21) نجد أن

$$\sum_{n=1}^{N}(a_n'^2+b_n'^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2\,dx<\infty$$

فنستنتج، من تقارب $\sum\frac{1}{n^2}$ ، أن المتتالية المتزايدة S_N محدودة من أعلى، فهي إذن متقاربة. □

نتيجة (3.3.1)

إذا كانت f تحقق شروط النظرية (3.3) فإن تقارب متسلسلة فوريير

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (3.27)$$

من الدالة f على الفترة $[-\pi,\pi]$ منتظم ومطلق.

البرهان

واضح أن امتداد الدالة f من $[-\pi,\pi]$ إلى $\mathbb{R}$ بالعلاقة

$$f(x+2\pi)=f(x) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

هو دالة متصلة تحقق شروط النظرية (3.2)، وبناء عليه فإن متسلسلة فوريير (3.27) تتقارب من f(x) عند كل $x\in\mathbb{R}$. ولكن

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leq|a_n|+|b_n|\leq 2\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

وبالنظر إلى تقارب $\sum\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ فإن المتسلسلة (3.27) متقاربة بانتظام باختبار فايرشتراس. □

بوسعنا الآن، بناء على النتيجتين (1.1.1) و (3.3.1)، أن نقول بأن الدالـة التـي تحقق شروط النظرية الأساسية (3.2) دالة متصلة إذا وفقط إذا كانت متسلسلة فورييـر التي تمثلها على $\mathbb{R}$ متقاربـة بانتظام. وغني عن القول أن هـذه النتيجـة تسـري علـى الدوال الدورية في $2l$ كما تسري على الدوال الدورية في 2π.

نتيجة (3.3.2)

لأي دالـة f تحقق شـروط النظريـة (3.2) تكـون متسلسلة فورييـر التي تمثلهـا متقاربـة بانتظام إذا وفقط إذا كانت f دالة متصلة.

تمـــارين (3.2)

(1) أثبت أن كل دالة متصلة قطعيا على [a,b] تنتمي إلى $\mathcal{L}^2(a,b)$.

(2) عين الدوال المتصلة قطعيًّا والملساء قطعيًّا من بين الدوال التالية :

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x} \;,\; x \in \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = |\sin| \;,\; x \in \mathbb{R}$

(iii) $f(x) = \sqrt{x} \;,\; 0 \le x < 1 \;,\; f(x+1) = f(x)$

(iv) $f(x) = |x|^{3/2} \;,\; -1 \le x \le 1 \;,\; f(x+2) = f(x)$

(v) $f(x) = [x] \;,\; x \in \mathbb{R}$

حيث [x] هو الجزء الصحيح من العدد x.

(3) افرض أن كلا من الدالتين f و g ملساء بالتجزيء على (a,b). أثبت أن كلا من المجمـــوع $f+g$ وحاصل الضرب $f\,g$ أيضا ملساء بـالتجزيء. مـاذا يمكـن أن نقول عن ناتج القسمة f/g؟

(4) افرض أن f ملساء بالتجزيء على الفترة (a,b) ودورية على $\mathbb{R}$.

(i) أثبت أن f ملساء بالتجزيء على $\mathbb{R}$

(ii) إذا كان دور الدالة f هو $b-a$ فأثبت أن

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

لكل فترة (c,d) تحقق $d-c=b-a$.

(5) افرض أن f دالة ملساء بالتجزيء على (a,b) وأن

$$g(h) = \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h} \ , \ h \neq 0$$

استنتج أن

$$g(0^+) = f'(x^+)$$

(6) أثبت أن D_n دالة زوجية ودورية في 2π.

(7) أثبت أن نواة ديريشليه $D_n(\xi)$ تساوي

$$D_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\xi}{2\pi \sin(\xi/2)} & , \quad \xi \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \\ \dfrac{2n+1}{2\pi} \ , & \xi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \end{cases}$$

(8) أوجد قيمة $D_n(\xi)$ العظمى.

(9) أوجد حلول المعادلة $D_n(\xi) = 0$.

(10) اكتب تفاصيل برهان النتيجة (3.2.1).

(11) اكتب نص الصيغة الأسية للنتيجة (3.2.1).

(12) أوجد منشور فوريير لكل من الدوال المعطاة في التمارين من (12) إلى (17) بعد التحقق من استيفاء شروط النظرية (3.2):

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & -\pi \leq x < 0 \ , \quad f(x+2\pi) = f(x) \\ \sin x \ , & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(13) $f(x) = x^2 \ , \ -2 \leq x \leq 2 \ , \ f(x+4) = f(x)$

(14) $f(x) = |x| \ , \ -\pi \leq x \leq \pi \ , \ f(x+2\pi) = f(x)$

(15) $f(x) = \sin^2 2x \ , \ -\pi \leq x \leq \pi \ , \ f(x+2\pi) = f(x)$

(16) $f(x) = e^x \ , \ -1 \leq x < 1 \ , \ f(x+2) = f(x)$

(17) $f(x) = x^3 \ , \ -1 \leq x < 1 \ , \ f(x+2) = f(x)$

(18) حدد نوع التقارب $S_n \to f$ في كل من التمارين من (12) إلى (17) من حيث انتظامه.

(19) احسب قيمة المتسلسلة $S(x)$ في التمرين (16) عند $x = 1$ وفي التمرين (17) عند $x = 1$.

(20) استخدم مفكوك فوريير للدالة $f(x) = x$ على $[-\pi,\pi)$ للحصول على

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(21) استخدم نتيجة التمرين (14) للحصول على متسلسلة تمثل العدد π^2.

(22) استخدم منشور الدالة v في المثال (3.2) للحصول على منشور للعدد π.

(23) أثبت أن

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \cdots + (-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx + \cdots$$

حيث $-\pi < x \leq \pi$. استنتج من ذلك قيم المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

(24) افرض أن f دالة ملساء قطعيًّا على $[0,\ell]$. يعرَّف **الامتداد الزوجي الدوري** (even periodic extension) للدالة f بأنه الدالةالدورية في2ℓ المعرفة على $(-\ell,\ell]$ بالشكل

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq \ell \\ f(-x), & -\ell < x \leq 0 \end{cases}$$

كما يعرف **الامتداد الفردي الدوري** (odd periodic extension) للدالة f بأنه الدالة الدورية في 2ℓ المعرفة على $(-\ell,\ell]$ بالشكل

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq \ell \\ -f(-x), & 0 < x \leq 0 \end{cases}$$

استنتج مفكوك فوريير لكل من f_e و f_0.

(25) إذا كانت الدالة f متصلة على $[0,\ell]$ فأثبت أن f_e أيضا متصلة على $\mathbb{R}$، ولكن f_0 متصلة إذا وفقط إذا كان $f(0) = f(\ell) = x$.

(26) باعتبار $f(x) = x$ على $[0,1]$ احسب مفكوك فورييـر لكـل مـن f_e و f_0 موضحـا إجابتك بالرسم.

(27) أوجد مفكوك فورييرِ بالصيغة الأسية للدالة

$$f(x) = e^{ax} \ , \ -\pi < x < \pi$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

(28) أوجد مفكوك فورييرِ للدالة

$$f(x) = \cos^3 x \ , x \in \mathbb{R}$$

(29) أوجد مفكوك فورييرِ بالصيغة الأسية للدالة

$$f(x) = x^2 \ , \ -2 < x < 2$$

$$f(x + 4) = f(x)$$

وقارن ما تحصل عليه بنتيجة التمرين (13).

الفصل الرابع

كثيرات الحدود المتعامدة

(4.1) مسألة شتورم ـ ليوفيل الشاذة

ذكرنا في الفصل الثاني أن مسألة شتورم ـ ليوفيل العادية عبارة عن معادلة تفاضلية من النوع

$$(pu')' + ru + \lambda wu = 0 \quad , \quad a < x < b \qquad (4.1)$$

بشروط حدية تحقق

$$p(u'\bar{v} - u\bar{v}')|_a^b = 0 \qquad (4.2)$$

حيث افترضنا أن $p(x) > 0$ وأن $w(x) > 0$ على الفترة المحدودة المغلقة $[a,b]$. وسيترتب على الاخلال بواحد أو أكثر من هذه الشروط أن تتحول المسألة إلى ما يعرف بالنوع الشاذ. في هذا الصدد سننظر في المسائل الشاذة التي تنشأ من الأوضاع التالية :

(i) $p(x) = 0$ عند $x = a$ أو $x = b$ أو كلاهما.

(ii) الفترة (a,b) غير محدودة.

في الحالة الأولى نجد أن الطرف الأيسر من (4.2) يساوي الصفر عند الطرف الذي تتلاشى $p(x)$ عنده دون الحاجة إلى فرض شرط حدي عند ذلك الطرف. وفي الحالة الثانية سيترتب على انتماء الدالة u إلى $\mathcal{L}^2(a,b)$ أن $u(x) \to 0$ عندما $|x| \to \infty$.

في هذا الفصل سنعرض بعض الأمثلة لمسائل شتورم ـ ليوفيل الشاذة، ونتعرف على خواص حلولها. لقد وجدنا أن أبسط مثال لمسألة شتورم ـ ليوفيل العادية، وهي التي تنشأ من المعادلة $u'' + u = 0$، تقود إلى المجموعة المتعامدة $\{1, \cos nx, \sin nx : n \in \mathbb{N}\}$ ونظرية فورير، وهي موضوع الفصل الثالث. وسنرى الآن أن حلول المسائل الشاذة تقود هي الأخرى إلى مجموعات متعامدة من الدوال، تشكل في مجملها نماذج لما يسمى **بالدوال الخاصة** (special functions). سنخصص هذا الفصل لدراسة حلول معادلات لوجاندر وهرميت ولاقير، وهي كثيرات حدود، ثم ننتقل في الفصل الخامس إلى معادلة بيسل وما ينشأ عنها من حلول.

سنرى من خلال دراستنا لهذا الفصل أن الانتقال من مسألة شتورم ـ ليوفيل العادية إلى المسألة الشاذة يشكل تعميما لنظرية فورير، بمعنى أن الدوال الذاتية للمسألة الشاذة، ولتكن $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$، تتمتع بالخواص الأساسية التي تتوفر للمجموعة $\{1, \cos nx, \sin nx : n \in \mathbb{N}\}$، وبصفة خاصة فإن

(1) المجموعة $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ متعامدة وتامة في $\mathcal{L}^2(a,b)$، أي أن

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f,\varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2} \varphi_n(x) \qquad \forall f \in \mathcal{L}^2(a,b)$$

وفي ذلك تعميم لنظرية (3.1)، وهي النظرية التي قبلناها دون برهان.

(2) إذا كانت الدالة f ملساء قطعيا على $[a,b]$ فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f,\varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2} \varphi_n(x)$$

متقاربة نقطيا عند كل $x \in (a,b)$ من $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$، وفي ذلك تعميم لنظرية (3,2)، لكن البرهان على ذلك يقع خارج نطاق هذه المعالجة.

(4.2) كثيرات حدود لوجاندر

تسمى المعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad , \quad -1 < x < 1 \qquad (4.3)$$

معادلة لوجاندر، نسبــة إلى الرياضي الفرنسي A - M. Legendre (1752-1833)، وهي من أبســط الأمثلــة على مسألة شتورم - ليوفيل الشــاذة، حيث تتلاشى الدالة $p(x) = 1 - x^2$ عند الطرفين $x = \pm 1$. بوضع المعادلة (4.3) في الصورة

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda}{1-x^2}y = 0$$

نرى أنها قابلة للحل بطريقة سلاسل القوى حول النقطة $x = 0$، ولذا نفرض أن $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. بالتعويض في المعادلة (4.3) نحصل على

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + \lambda\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2} + (\lambda - k(k+1))c_k]x^k = 0$$

$$\Rightarrow c_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+1)(k+2)}c_k \qquad (4.4)$$

إذا كان $\lambda = n(n+)$، حيث $n \in \mathbb{N}_0$، فمن العلاقة (4.4) نحصل على

$$0 = c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \dots$$

ويترتب على ذلك أن أحد حلّي المعادلة (4.3) كثيرة حدود. بهذا الاختيار للمتغير البارامتري λ تأخذ العلاقة (4.4) الشكل

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1)-n(n+1)}{(k+1)(k+2)}c_k = \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+2)}c_k \qquad (4.5)$$

على افتراض أن c_0 و c_1 ثابتان اختياريان، فإننا نحصل من (4.5) على بقية المعاملات

$$c_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}c_0 \qquad c_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}c_1$$

$$c_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4.3}c_2 \qquad c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5.4}c_3$$

$$= -\frac{(n-2)(n+3)n(n+1)}{4!}c_0 \qquad = -\frac{(n-3)(n+4)(n-1)(n+2)}{5!}c_1$$

. . .

$$\Rightarrow y(x) = c_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n-2)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right]$$

$$+c_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots\right]$$

$$= c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x)$$

حيث المتسلسلتان y_0 وy_1 متقاربتان في $(-1,1)$ ومستقلتان خطيًّا، فالأولى دالة زوجية والثانية فردية. لكل n في $\mathbb{N}_0$ نحصل الآن على زوج من الحلول المستقلة

$$n=0, \quad y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = x + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$$

$$n=1, \quad y_0(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots$$

$$y_1(x) = x$$

$$n=2, \quad y_0(x) = 1 - 3x^2$$

$$y_1(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$$

$$n=3, \quad y_0(x) = 1 - 6x^2 + 3x^4 + \cdots$$

$$y_1(x) = x - \frac{5}{3}x^3$$

. . .

ونلاحظ أن أحد الحلين كثيرة حدود والآخر متسلسلة قوى متقاربة في $(-1,1)$، وأن كثيرة الحدود - وهي محل اهتمامنا - على الصورة

$$a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-4} x^{n-4} + \cdots \tag{4.6}$$

فهي كثيرة حدود من الدرجة n، إما زوجية أو فردية تبعًا للعدد n. إذا اخترنا معامل أكبر قوة x^n بأنه

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{n!} \tag{4.7}$$

فإن كثيرة الحدود التي تنتج عن هذا الاختيار تسمى **كثيرة حدود لوجاندر** (Legendre polynomial) من الدرجة n، ويرمز لها بـ $P_n(x)$.

يترتب على الاختيار (4.7) أن بقية المعاملات في (4.6) تتحدد استنادا إلى العلاقة (4.5) على النحو التالي:

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!}$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}$$

ونجد بالاستقراء على الصيغة العامة لمعاملات كثيرة الحدود (4.6) أن

$$a_{n-2k} = (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \quad , \quad n-2k \geq 0 \tag{4.8}$$

مع ملاحظة أن المعامل الأخير يساوي

$$a_0 = (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n (n/2)!(n/2)!}$$

عندما يكون n عددًا زوجيا ، ويساوي

$$a_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n+1)!}{2^n(\frac{n-1}{2})!(\frac{n+1}{2})!}$$

إذا كان n عددا فرديا. وبذلك نتوصل إلى التمثيل التالي لكثيرة حدود لوجاندر من الدرجة n

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \tag{4.9}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!} x^{n-2} + \cdots$$

حيث [n/2] هو الجزء الصحيح من العدد $\frac{n}{2}$ ، أي $\frac{n}{2}$ إن كان n عددًا زوجيًّا أو $\frac{n-1}{2}$ إن كان فرديًّا. ونحصل من التمثيل (4.9) على

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$\cdots$$

بوسعنا الآن أن نضع النتائج التي توصلنا إليها في النقاط التالية :

(1) لمعادلة لوجاندر

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \tag{4.10}$$

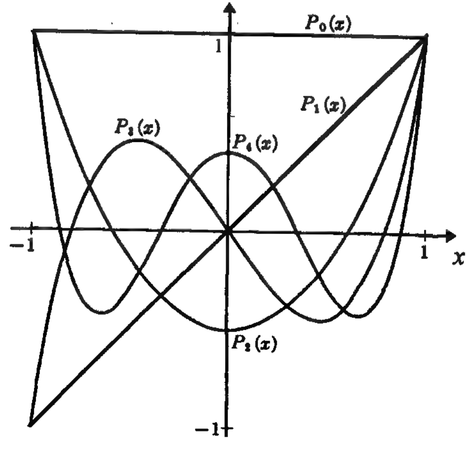
حلان مستقلان، أحدهما كثيرة حدود لوجاندر من الدرجة n المعرفة بالصيغة (4.9)، والآخر دالـة تحليليــة في الفترة (1,1−) ممثلة بمتسلسلة قـوى حول النقطة $x = 0$، يرمز لها بالرمز $Q_n(x)$ وتسمى أحيانا **دالة لوجاندر**. فنجد على سبيل المثال أن

$$Q_0(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

(2) بما أن معـادلة لوجاندر من نوع شتورم - ليوفيل فإن حلولـها متعـامدة فـي $\mathcal{L}^2(-1,1)$، وبصفة خاصة فإن المجموعة $\{P_n : n \in \mathbb{N}_0\}$، وهي الحلول المحدودة على $[-1,1]$، متعامدة وتامة في $\mathcal{L}^2(-1,1)$. وسنتأكد من خاصة التعامد هذه بأكثر من طريقة (انظر تمرين 4.1.2 على سبيل المثال).

(3) نظرًا لأن معادلة لوجاندر متجانسة فإن $cP_n(x)$، لأي ثابت c، أيضا يحقق المعادلة وقد اختير معامل x^n في $P_n(x)$ بالشـكل (4.7) لكـي تحقـق P_n العلاقة $P_n(1) = 1$ لكل n كما سنرى في البند (4.2).

وفيما يلي نعرض الرسوم البيانية لبعض كثيرات الحدود P_n:



شكل (4.1)

تمارين (4.1)

(1) تحقق من أن $P_n(x)$ حل لمعادلة لوجاندر (4.10) في الحالات الخاصة $n = 3$، $n = 4$.

(2) استخدم طريقة قرام ـ شميدت لتحويل المجموعة المستقلة

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 : -1 \le x \le 1\}$$

إلى مجموعة متعامدة. قارن بين النتيجة وكثيرات حدود لوجاندر $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$.

(3) أثبت أن $Q_1(x) = 1 - \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(4) استنتج من الصيغة (4.9) أن

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

(5) استخدم صيغة ذي الحدين

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}$$

والعلاقة (4.9) للحصول على **صيغة رودريقس** (Rodrigues Formula)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

(6) تحقق من أن الدالة P_n، المعطاة بصيغة رودريقس، تحقق معادلة لوجاندر بالتعويض المباشر.

(7) أثبت أن التعويض $x = \cos\theta$ يحول معادلة لوجاندر إلى الشكل

$$\sin\theta\frac{d^2y}{d\theta^2} + \cos\theta\frac{dy}{d\theta} + n(n+1)\sin\theta y = 0$$

حيث $0 \le \theta \le \pi$. لاحظ ظهور دالة الثقل $\sin\theta$ في هذه الصيغة.

(4.3) خواص كثيرات حدود لوجاندر

توصلنا في التمرين 4.1.5 إلى التمثيل التالي لكثيرة حدود لوجاندر

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \tag{4.11}$$

وسنستخدم هذه الصيغة المعروفة **بصيغة رودريقس**، لإثبات تعامد المجموعة $\{P_n: n\in \mathbb{N}_0\}$ بطريقة مباشرة.

افرض أن $m<n$. باستخدام التكامل بالتجزي، نجد أن

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)x^m dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\left[x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1} x^{m-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx\right]$$

$$= \frac{-1}{2^n n!}\left[mx^{m-1}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} - m(m-1)\int_{-1}^{1} x^{m-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2-1)^n dx\right]$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{(-1)^m m!}{2^n n!}\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 0 \quad (\because 0 \le n-m-1 < n)$$

$$\Rightarrow \quad P_n \perp x^m \quad \forall m<n$$

$$\Rightarrow \quad P_n \perp P_m \quad \forall m<n$$

$$\Rightarrow \quad P_n \perp P_m \quad \forall m\neq n$$

لحساب $\|P_n\|$، نلاحظ أن

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} u^{(n)}(x)u^{(n)}(x)dx \tag{4.12}$$

حيث $u(x) = (x^2-1)^n$ ، ونلجأ إلى التكامل بالتجزيء مرة أخرى لنحصل على

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u^{(n)}(x)u^{(n)}(x)dx &= -\int_{-1}^{1} u^{(n-1)}(x)u^{(n+1)}(x)dx \\
&= \cdots \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} u(x)u^{(2n)}(x)dx \\
&= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^{1} u(x)dx \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1)^n \int_{-1}^{1} u(x)dx &= \int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n dx \\
&= \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1}(1+x)u^{n+1}dx \\
&= \cdots \\
&= \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n} dx \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \left.\frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1}\right|_{-1}^{1} \\
&= \frac{(n!)2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

ومن المعادلات (4.12)، (4.13)، (4.14) نجد أن

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

فنستنتج أن المجموعة

$$\frac{1}{\sqrt{2}} P_0(x), \sqrt{\frac{3}{2}} P_1(x), \sqrt{\frac{5}{2}} P_2(x), \ldots, \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \ldots$$

متعامدة عياريًا في $\mathcal{L}^2(-1,1)$.

مثـال (4.1)

بما أن الدالة

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ 1 & 0<x<1\end{cases}$$

تقع في $\mathscr{L}^2(-1,1)$ ، فمن تمام المجموعـة $\{P_n: n\in\mathbb{N}_0\}$ في $\mathscr{L}^2(-1,1)$ نستطيع أن نكتب

$$f(x)\doteq\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$$

حيث تتحدد المعـاملات c_n ، التي تسـمى أحيانا **معـاملات فوريـير ـ لوجـاندر** ، مـن القاعدة

$$c_n=\frac{\langle f,P_n\rangle}{\|P_n\|^2}=\frac{2n+1}{2}\int_0^1 P_n(x)dx$$

فنحصل بذلك على

$$f(x)\doteq\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_3(x)+\cdots \tag{4.15}$$

وبما أن الدالة

$$f(x)-\frac{1}{2}P_0(x)=\begin{cases}-1/2 & -1<x<0\\ 1/2 & 0<x<1\end{cases}$$

فردية فإن منشور f بدلالة P_n لا يشمل من قيم n الزوجية سـوى الحـد الأول P_0. وبمـا أن $P_n(0)=0$ لكل n فردية فإن قيمة الطرف الأيمن مـن المعادلـة (4.15) عنـد النقطـة $x=0$ يساوي

$$\frac{1}{2}P_0(0)=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}[f(0^+)+f(0^-)]$$

بما يتفق مع تعميم النظرية (3.2).

نظرية (4.1)

لكل $x\in[-1,1]$ ولكل $t \in \mathbb{C}$ بحيث $|t| < 1$ فإن

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \qquad (4.16)$$

(يسمى الطرف الأيسر من هذه المساواة **الدالة المولّدة** (generating function) لكثيرات حدود لوجاندر).

البرهان

باستخدام صيغة كوشي التكاملية (انظر [3])، لدينا

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(z^2-1)^n}{2^n(z-x)^{n+1}}dz$$

حيث C هي الدائرة $\{z \in \mathbb{C} : |z-x| = 1\}$ في الاتجاه الموجب.

إذا اخترنا العدد $|t|$ صغيرا بالقدر الكافي فإن المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{t(z^2-1)}{2(z-x)}\right]^n$$

تكون متقاربة بانتظام على الدائرة C، وبالتالي فإن

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-x|=1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-x|=1}\frac{1}{z-x}\left[1-\frac{t}{2}\left(\frac{z^2-1}{z-x}\right)\right]^{-1}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-x|=1}\frac{2}{t-2x+2z-tz^2}dz$$

حيث أصفار المقام $t-2x+2z-tz^2$ هما

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{1-2xt+t^2}}{t} \quad , \quad z_2 = \frac{1+\sqrt{1-2xt+t^2}}{t}$$

وعندما يكون العدد $|t|$ صغيرا فإن المقدار

$$\sqrt{1-2xt+t^2} = 1 - xt + \cdots$$

يكون قريبا من $1 - xt$ ، ونستنتج أن $z_1 \approx x$ يقع داخل الدائرة C بينما $z_2 \approx \frac{2}{t} - x$ يقع خارجها. من نظرية الرواسب، نجد الآن أن

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n &= \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{2}{t-2x+2z-tz^2} \\
&= \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{2}{-t(z-z_1)(z-z_2)} \\
&= \frac{2}{-t(z_1-z_2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}
\end{aligned}$$

فنحصل بذلك على المساواة (4.16) لقيم t في جوار 0. لكن الطرف الأيمن من المعادلة هو منشور تايلور لدالة تحليلية في t حول 0، ويتحدد نصف قطر التقارب للمتسلسلة من النقاط الشاذة $t = x \pm i\sqrt{1-x^2}$ للدالة، أي أنه 1. وهذا يعني أن (4.16) صحيحة لكل t تحقق $|t| < 1$.

نتيجة (4.1.1)

$$P_n(1) = 1 \quad , \quad P_n(-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

البرهان

من النظرية (4.1)، لدينا

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n = \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

فنحصل على المطلوب بمقارنة معاملات القوى t^n.

تمارين (4.2)

(1) أثبت أن

$$\frac{1}{|re^{i\theta}-1|} = \frac{1}{\sqrt{r^2-2r\cos\theta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)r^n$$

حيث $r<1$، ثم استنتج أن

$$\frac{1}{\|v_2-v_1\|} = \frac{1}{\|v_2\|}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left\|\frac{v_1}{v_2}\right\|^n$$

لأي متجهين v_1 و v_2 في المستوي بينهما الزاوية θ بحيث $\left\|\frac{v_1}{v_2}\right\| < 1$

(2) أثبت أن

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ثم استنتج أن

$$\int_1^x P_n(t)dt = \frac{1}{(2n+1)}[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]$$

(3) أثبت أن

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(4) أثبت أن

$$(n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

(5) أثبت أن

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + P'_{n-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(6) مثل كلا من الدوال التالية بمتسلسلة لوجاندر

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $f(x) = 1 - x^3$

(7) احسب الحدود الخمسة الأولى من منشور لوجاندر للدالة $f(x) = |x|$ على الفترة $[-1,1]$.

(8) أوجد منشور لوجاندر للدالة

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ , & -1 < x < 0 \\ 1 \ , & 0 < x < 1 \end{cases}$$

مستخدما نتيجة التمرين 4.2.2. احسب قيمة المتسلسلة عند $x = 0$ وقارن ذلك بمتوسط النهايتين $f(0^+)$ و$f(0^-)$.

(9) ابحث التقارب النقطي لسلاسل لوجاندر في التمرينين 4.2.7 و 4.2.8 عند $x = \pm 1$. هل التقارب منتظم على الفترة $[-1,1]$؟

(4.4) كثيرات حدود هرميت ولاقير

أولا: كثيرات حدود هرميت

تعرّف كثيرة حدود هرميت $H_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، نسبة إلى الرياضي الفرنسي C. Hermite (1822-1901)، بالصيغة

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad (4.17)$$

ومنها نحصل على المتتالية

$$H_0(x) = 1, \ H_1(x) = 2x, \ H_2(x) = 4x^2 - 2, \ H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \ H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x, \ldots$$

كما نستنتج من التعريف (4.17) أن H_n تتمتع بالخواص التالية :

(i) H_n كثيرة حدود من الدرجة n

البرهان

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2} = (-2x)^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = (-2x)^n e^{-x^2} + p(x)e^{-x^2}$$

حيث p كثيرة حدود درجتها أقل من n. إذن، من التعريف (4.17)،

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2}[(-2x)^n + p(x)]e^{-x^2} \\ &= (2x)^n + (-1)^n p(x) \end{aligned} \tag{4.18}$$

(ii) المجموعة $\{H_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ متعامدة في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}\,;\, e^{-x^2})$.

البرهان

لتكن $m < n$. إذن

$$\begin{aligned} \langle H_m, H_n\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\,dx \end{aligned}$$

بعد إجراء التكامل بالتجزيء n من المرات وملاحظة أن

$$\lim_{|x|\to\infty} p(x)e^{-x^2} = 0$$

لأي كثيرة حدود p، فإن

$$\langle H_m, H_n\rangle = (-1)^{2n}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d^n}{dx^n}H_m(x)\right]e^{-x^2}\,dx = 0$$

لأن $m < n$.

$$\Rightarrow H_m \perp H_n \quad \forall\, m < n$$
$$\Rightarrow H_m \perp H_n \quad \forall\, m \neq n$$

(iii) $\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$

البرهان

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2}\, dx$$
$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^n}{dx^n} H_n(x)\right] e^{-x^2}\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2^n n!\, e^{-x^2}\, dx$$

حيث نحصل على المساواة الأخيرة من (4.18). ولكن (راجع تمرين 4.3.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

فنحصل بذلك على المساواة المنشودة.

(iv) لكل $x, t \in \mathbb{R}$ فإن

$$e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \tag{4.19}$$

أي أن الطرف الأيسر من هذه المعادلة هي الدالة المولّدة لكثيرات حدود هرميت.

البرهان

بما أن $f(x,t) = e^{2tx - t^2}$ دالة تحليلية في t فإنها قابلة للتمثيل بمتسلسلة تيلور

$$f(x,t)=e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial t^n}\Big|_{t=0}t^n$$

ولكن

$$\frac{\partial^n f}{\partial t^n}\Big|_{t=0}=\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{x^2-(x-t)^2}\Big|_{t=0}$$

$$=e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{-(x-t)^2}\Big|_{t=0}$$

$$=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{du^n}e^{-u^2}\Big|_{u=x}$$

حيث $u=x-t$. وعليه فإن

$$\frac{\partial^n f}{\partial t^n}\Big|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}=H_n(x)$$

نظرية (4.2)

تحقق كثيرة حدود هرميت H_n المعادلة التفاضلية

$$y''-2xy'+2ny=0\quad,\quad x\in\mathbb{R}\tag{4.20}$$

البرهان

سنثبت أولا أن

$$H'_n(x)=2n\,H_{n-1}(x)\quad,\quad n\in\mathbb{N}\tag{4.21}$$

وذلك باشتقاق المتطابقة (4.19) بالنسبة للمتغير x:

$$2te^{2tx-t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}H'_n(x)t^n\tag{4.22}$$

ولكن الطرف الأيسر هو

$$2te^{2tx-t^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)t^{n+1}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} H_n(x) t^{n+1}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} H_{n-1}(x) t^n \qquad (4.23)$$

فنحصل على المعادلة (4.21) بمقارنة حدود المتسلسلتين (4.22) و (4.23).

ومن جهة ثانية فإن اشتقاق (4.19) بالنسبة للمتغير t يقود إلى

$$2(x-t)e^{2tx-t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} H_n(x) t^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_{n+1} t^n$$

$$\Rightarrow 2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_{n+1}(x) t^n$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} H_n(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_{n+1}(x) t^n$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} H_{n-1}(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_{n+1}(x) t^n$$

وبمقارنة قوى t في طرفي المعادلة نجد أن

$$2xH_0(x) = H_1(x)$$

$$2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \qquad (4.24)$$

من المعادلتين (4.21) و (4.24) نرى الآن أن

$$2xH_n(x) = H'_n(x) + H_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow H''(x) = 2xH'_n(x) + 2H_n(x) - H'_{n+1}(x)$$

$$= 2xH'_n(x) + 2H_n(x) - 2(n+1)H_n(x)$$

$$= 2xH'_n(x) - 2nH_n(x) \qquad \square$$

تسمى المعادلة التفاضلية (4.20) **معادلة هرميت**، وقد توصلنا إلى أن H_n أحد حلَّي هذه المعادلة. أما الحل الآخر فهو دالة تحليلية ممثلة بمتسلسلة قوى (انظر التمرين 4.3.6).

بعد الضرب في e^{-x^2} تتحول المعادلة (4.20) إلى

$$(e^{-x^2} y')' + 2ne^{-x^2} y = 0 \qquad (5.25)$$

وهي الصيغة القياسية لمعادلة شتورم ليوفيل على الفترة غير المنتهية $(-\infty,\infty)$ حيث $p(x) = e^{-x^2}$، $\lambda = 2n$، $w(x) = e^{-x^2}$. وهذا يعني أن كثيرات حدود هرميت $\{H_n: n\in \mathbb{N}_0\}$، التي سبق أن أثبتنا تعامدها بالنسبة لدالة الثقل e^{-x^2}، هي مجموعة تامة في $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty; e^{-x^2})$ لأنها تشكل مجموعة الدوال الذاتية للمعادلة (4.25) التي تنتمي إلى هذا الفضاء (انظر تمرين 4.3.7).

ثانيًا: كثيرات حدود لاقير

تسمى المعادلة التفاضلية

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \ , \quad n\in \mathbb{N}_0 \qquad (4.26)$$

حيث $0 \leq x < \infty$، **معادلة لاقير**، نسبة إلى الرياضي الفرنسي E. Laguerre (1834-1886).

ومنها نحصل على الصورة القياسية لمعادلة شتورم ليوفيل

$$(xe^{-x}y')' + ne^{-x}y = 0 \qquad (4.27)$$

بعد الضرب في e^{-x}، حيث نلاحظ أن دالة الثقل هنا e^{-x}. وبإمكاننا الحصول على مجموعة حلول المعادلة (4.27) المتعامدة والتامة في $\mathcal{L}^2(0, \infty; e^{-x})$ باتباع الخطوات التي سبق اتباعها للحصول على P_n و H_n، وهي

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1-x$$

$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

$$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

$$\vdots$$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{4.28}$$

ونلاحظ على الفور أن لكل $m < n$ فإن

$$\begin{aligned}\langle x^m, L_n\rangle &= \int_0^\infty e^{-x} x^m L_n(x)dx \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})dx \\ &= (-1)^m \frac{m!}{n!}\int_0^\infty \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^n e^{-x})dx \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle L_m, L_n\rangle = 0 \quad \forall m \neq n$$

لأن L_m كثيرة حدود من الدرجة m (تمرين 4.3.12). كما أن

$$\langle x^n, L_n\rangle = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = (-1)^n n!$$

وبما أن معامل x_n في كثيرة الحدود L_n هو $(-1)^n/n!$ فإن

$$\|L_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{n!}\langle x^n, L_n\rangle = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فنستنتج من ذلك أن **كثيرات حدود لاقير** L_n متعامدة عياريا في $\mathcal{L}^2(0,\infty; e^{-x})$.

تمارين (4.3)

(1) أثبت أن $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ بتحويل التكامل

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

بالنسبة للاحداثيات الديكارتية (x,y) إلى تكامل بالنسبة للإحداثيات القطبية (r,θ).

(2) أثبت أن كثيرة الحدود H_n مكونة من قوى زوجية أو فردية متبعا للعدد n.

(3) أثبت أن

$$H_n(x) = n!\sum_{k\le n/2} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

بالاستقراء على n.

(4) أوجد منشور الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 \;, & x<0 \\ 1 \;, & x>0 \end{cases}$$

بدلالة كثيرات حدود هرميت (استخدم التمرين 4.3.3).

(5) عبر عن دالة $f(x) = x^4$ بكثيرات حدود هرميت.

(6) تسمى المعادلة التفاضلية

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$$

أيضا معادلة هرميت. بافتراض أن $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r}$ والتعويض في

المعادلة استنتج أن

$$c_{k+2} = \frac{2(k+r-\lambda)}{(k+r+2)(k+r+1)} c_k$$

وأن $r(r-1) = 0$. ثم أثبت أن الحل المناظر للقيمة $r = 0$ هو

$$y_0(x) = c_0\left[1 - \frac{2\lambda}{2!}x^2 + \frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4 - \cdots\right]$$

حيث c_0 ثابت ، وأن الحل المناظر للقيمة $r = 1$ هو

$$y_1(x) = c_1\left[x - \frac{2(\lambda-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 + \cdots\right]$$

حيث c_1 ثابت ، فيكون الحل العام للمعادلة

$$y = y_0(x) + y_1(x)$$

لاحظ أن كلا من y_0 و y_1 متسلسلة غير منتهية (الأولى زوجية والثانية فردية) إلا عندما يكون λ عددا صحيحا غير سالب ، وعندئذ يصبح أحد الحلين كثيرة الحدود H_n (باختيار مناسب للثابت).

(7) أثبت أن كلا من الدالتين $e^{-x^2}y_0(x)$ و $e^{-x^2}y_1(x)$ تقترب من عدد ثابت عندما $|x|\to\infty$ ، وأن هذا العدد الثابت يساوي الصفر عندما يكون الحل كثيرة الحدود H_n. ثم استنتج من ذلك أن أي حل y لمعادلة هرميت يحقق

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, y^2(x)dx < \infty$$

إذا وفقط إذا كان $y = H_n$.

(8) أثبت أن الدالة $\psi_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x)$ تحقق المعادلة

$$\psi_n'' + [(2n+1) - x^2]\psi_n = 0$$

المعروفة **بمعادلة شرودنقر** (Schrödinger's equation).

تسمى ψ **دالة هرميت** ذات الرتبة n.

(9) تحقق من تعامد الدوال L_0 ، L_1 ، L_2 على الفترة $[0,\infty)$ بالنسبة لدالة الثقل e^{-x}.

(10) أثبت أن

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k$$

(11) عبر عن الدالة $f(x) = x^3 - x$ بدلالة كثيرات حدود لاقير.

(12) أثبت أن L_n كثيرة حدود من الدرجة n.

(13) أوجد منشور لاقير للدالة $f(x) = x^m$ حيث $m\in\mathbb{N}$ على الفترة $[0,\infty)$.

(14) أوجد منشور لاقير للدالة $f(x) = e^{x/2}$ ، $0 \le x < \infty$.

(15) أثبت أن كثيرة الحدود L_n تحقق المعادلة (4.26).

(16) أوجد الحل الكامل لمعادلة لاقير

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

عندما $n = 0$ ، $n = 1$.

(4.5) تطبيق فيزيائي

تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f \qquad (4.29)$$

معادلة بواسون، وهي تمثل نموذجا رياضيا ملائما لوصف العديد من الظواهر الطبيعية، مثل المجال الكهروستاتيكي الناتج من توزيع الشحنة الكهربائية $f(x,y,z)$ في الفضاء الثلاثي. وفي نطاق خال من الشحنات، نرمز له بـ Ω ، تأخذ المعادلة (4.29) الصورة المتجانسة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.30)$$

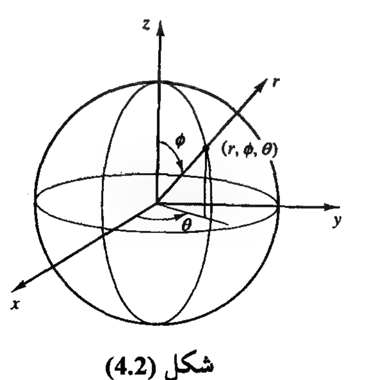
التي تعرف **بمعادلة لابلاس**، نسبة إلى الرياضي الفرنسي P.S. de Laplace (1749-1827)، وتسمى حلولها في $C^2(\Omega)$ **دوال توافقية** (harmonic functions) على Ω . إذا أجرينا التحويل من الإحداثيات الديكارتية (x, y, z) إلى الإحداثيات الكروية (r, θ, φ)، المعرف بالمعادلات

$$x = r \cos\theta \sin\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r \cos\varphi$$

حيث $r > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi$



شكل (4.2)

فإن المعادلة (4.30) تتحول إلى

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi})+\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \qquad (4.31)$$

وعلى افتراض أن الدالة u لا تعتمد على الزاوية θ، أي أن المحور z هو محور تماثل للدالة u، فإن المعادلة (4.31) تصبح

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi})=0 \qquad (4.32)$$

سنستخدم طريقة فصل المتغيرات لحل المعادلة (4.32)، فنفرض أن $u(r,\varphi)=v(r)w(\varphi)$، ونحصل بعد التعويض في (4.32) على المعادلة

$$\frac{1}{v}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dv}{dr})=-\frac{1}{w\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi\frac{dw}{d\varphi}) \qquad (4.33)$$

حيث الطرف الأيسر دالة في المتغير r بينما الطرف الأيمن دالة في المتغير φ. وهذه المساواة لا يمكن أن تتحقق إلا إذا كان كل من الطرفين عددًا ثابتًا، نرمز له بـ λ.
عندئذ نحصل من (4.33) على زوج المعادلات التفاضلية العادية

$$r^2v''+2rv'-\lambda v=0 \qquad (4.34)$$

$$(\sin\varphi w')'+\lambda\sin\varphi w=0 \qquad (4.35)$$

بوضع $\xi=\cos\varphi$ في المعادلة (4.35) وملاحظة أن

$$\frac{d}{d\varphi}=\frac{d\xi}{d\varphi}\frac{d}{d\xi}=-\sin\varphi\frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi\frac{dw}{d\varphi})=\frac{d}{d\xi}[(1-\xi)^2\frac{dw}{d\xi}]$$

فإن المعادلة (4.35) تأخذ الصورة القياسية لمعادلة لوجاندر

$$\frac{d}{d\xi}[(1-\xi)^2\frac{dw}{d\xi}]+\lambda w=0 \qquad (4.36)$$

وبوضع $\lambda=n(n+1)$ نحصل على حلول المعادلة (4.35)

$$w_n(\varphi)=P_n(\xi)=P_n(\cos\varphi)$$

أما المعادلة (4.34) فهي من نوع كوشي ــ أويلر، ويترتب على التعويض $v(r) = r^{\alpha}$ أن

$$[\alpha(\alpha-1)+2\alpha - n(n+1)]r^{\alpha} = 0$$
$$\Rightarrow \alpha = n\,,\, -n-1 \quad n\in\mathbb{N}_0$$
$$\Rightarrow v_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n-1}$$

فنحصل بذلك على الحل العام لمعادلة لابلاس (4.32) كتركيب خطي لمتتالية الحلول

$$u_n(r,\varphi) = (a_n r^n + b_n r^{-n-1})P_n(\cos\varphi) \quad , \quad n\in\mathbb{N}_0$$

حيث a_n و b_n ثوابت اختيارية. أي أن

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-n-1})P_n(\cos\varphi) \qquad (4.37)$$

وجدير بالملاحظة في هذه النتيجة أننا أهملنا (لأسباب فيزيائية) دوال لوجاندر $Q_n(\cos\theta)$، وهي الحلول غير المحدودة للمعادلة (4.35) على محور z (حيث $\cos\theta = \pm1$) بينما استبقينا r^{-n-1}، وهي حلول (4.34) غير المحدودة عند $r = 0$. لكننا سنضطر إلى اختيار $b_n = 0$ إذا كانت نقطة الأصل تقع في النطاق Ω لكي تبقى الدالة u محدودة في Ω.

لنفرض، على سبيل المثال، أن $u(r,\varphi)$ دالة توافقية داخل الكرة $0 \le r < R$ وأن $u(R,\varphi) = f(\varphi)$ على سطح الكرة $r = R$، حيث f دالة معطاة. مما تقدم نرى أن

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\varphi) \qquad (4.38)$$

وتتحدد المعاملات a_n بتطبيق الشرط الحدي عند $r = R$

$$u(R,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\varphi) = f(\varphi)$$

فنستنتج أن $a_n R^n$ هي معاملات فورير ـ لوجاندر لمنشور الدالة $f(\varphi)$ بدلالة $P_n(\cos\varphi)$. أي أن

$$a_n R^n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(\varphi(\xi))P_n(\xi)d\xi$$

$$a_n = \frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi} f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.39}$$

أما في النطاق $r > R$، أي خارج الكرة $0 \le r < R$، فإن الدوال r^n تصبح غير محدودة وينبغي إسقاطها من التمثيل (4.37)، فتكون صيغة الحل عندئذ بالشكل

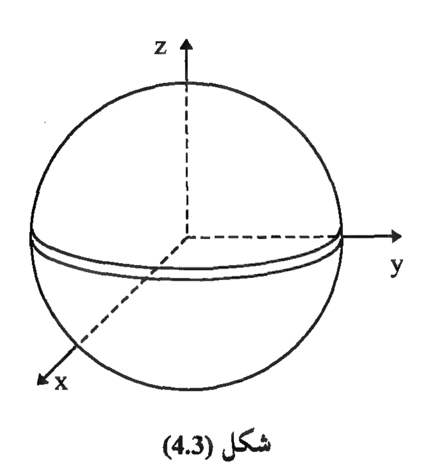
$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n-1} P_n(\cos\varphi)$$

ويترتب على تطبيق الشرط الحدي $u(R,\varphi) = f(\varphi)$ أن

$$b_n = \frac{2n+1}{2} R^{n+1}\int_0^{\pi} f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi \tag{4.40}$$

مثـال (4.2)

إذا فُصل سطح معدني كروي الشكل إلى نصفين كما في الشكل (4.3) ووُضع عازل مناسب بينهما، ثم وضعت شحنة كهربائية مختلفة على كل منهما، فإنه يتولد عن ذلك مجال كهربائي في داخل السطح الكروي وخارجه، ويسمى الجهاز **مكثفًا كهربائيًّا** (electric capacitor). لنفرض أن الجهد (potential) على النصف العلوي للمكثف 10 volt وأنه 0 على النصف السفلي. أوجد الجهد عند أي نقطة داخل السطح الكروي الذي نصف قطره وحدة طول واحدة.



شكل (4.3)

الحـــل

باعتبـــار u دالة الجهد نرى من تماثل توزيع الشحنة حول محــور z أن $u = u(r,\varphi)$ ، وهي تحقق معادلة لابلاس داخل الكرة وخارجها. كما أن

$$u(1,\varphi) = f(\varphi) = \begin{cases} 10 & , \quad 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 & , \quad \pi/2 < \varphi \le \pi \end{cases}$$

فنحصل من (4.39) على

$$a_n = \frac{2n+1}{2} 10 \int_0^{\pi/2} P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi$$
$$= 5(2n+1)\int_0^1 P_n(\xi)d\xi$$

وباستخدام الصيغة (4.9) نجد أن

$$a_n = \frac{5(2n+1)}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k+1)!}$$
$$a_0 = 5 \ , \ a_1 = \frac{15}{2} \ , \ a_2 = 0 \ , \ a_3 = -\frac{-35}{8} \ , \ \ldots$$
$$\Rightarrow u(r,\varphi) = 5 + \frac{15}{2} rP_1(\cos\varphi) - \frac{35}{8} r^3 P_3(\cos\varphi) + \cdots, \quad r < 1$$

تمارين (4.4)

(1) في المثال (4.2) أوجد $u(r,\varphi)$ خارج الكرة $r \le 1$.

(2) أوجد معادلـة السطح الذي تكــون عليه الدالة $u_n(r,\varphi) = r^n P_n(\cos\varphi)$ صفرًا، حيث $n = 1,2,3$.

(3) ارسم الدوال $P_1(\cos\varphi)$ و $P_2(\cos\varphi)$.

(4) أوجد الحل $u(r,\varphi)$ لمعادلة لابلاس في داخل الكرة التي نصف قطرها R إذا كان

$$u(R,\varphi) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ -1 & , \quad \pi/2 < \varphi \le \pi \end{cases}$$

الفصل الخامس

دوال بيسل

قبل الحديث عن **دوال بيسل** سنتعرف أولا على **دالة قاما** (gamma fuction) لدورها في تعريف تلك الدوال.

(5.1) دالة قاما

تعرف **دالة قاما** لكل $x > 0$ بالتكامل المعتل

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \tag{5.1}$$

وليس من العسير التحقق من أنها متصلة على $(0,\infty)$ (تمرين 5.1.1) وبإجراء التكامل (5.1) بالتجزيء نجد أن

$$\Gamma(x+1) = -e^{-t} t^{x}\Big|_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$= x\Gamma(x)$$

فنحصل بذلك على العلاقة المميِّزة لدالة قاما

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \forall\, x > 0 \tag{5.2}$$

وعندما تكون $x = n \in \mathbb{N}$ فإن

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\,\Gamma(n-1) \\ &\;\;\cdots \\ &= n!\,\Gamma(1) \end{aligned}$$

ولكن

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$$

مما يعني أن

$$\Gamma(n+1)=n!$$

أي أن Γ هي امتداد للدالة $n\mapsto(n-1)!$ من $\mathbb{N}$ إلى $(0\,,\infty)$.

من العلاقة (5.2) نحصل على

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

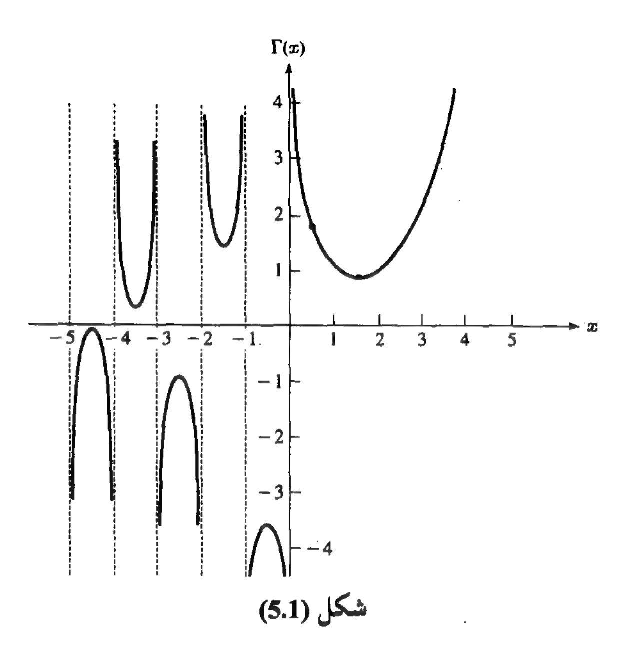
حيث الطرف الأيمن قابل للتمديد إلى $(0,\infty)\cup(-1,0)$ مع ملاحظة أن النقطة $x=0$ تمثل قطبًا بسيطًا للدالة Γ لأن

$$\lim_{x\to 0^+}\Gamma(x+1)=\lim_{x\to 0^-}\Gamma(x+1)=\Gamma(1)=1$$

وبالمثل فإن العلاقات

$$\begin{aligned}\Gamma(x)&=\frac{\Gamma(x+1)}{x}\\&=\frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}\\&\cdots\\&=\frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\qquad\forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

تسمح بتمديد الدالة Γ إلى $\mathbb{R}$ باستثناء الأعداد الصحيحة السالبة $\{\ldots,-3,-2,-1\}$، حيث يشكل كل من هذه الأعداد قطبًا بسيطًا للدالة. والشكل (5.1) يمثل الرسم البياني لدالة قاما.



شكل (5.1)

تمارين (5.1)

(1) أثبت أن دالة قاما المعرفة بالقاعدة (5.1) متصلة على $(0,\infty)$.

(2) أثبت أن $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(3) أثبت أن

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{n!4^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

واستنتج الصيغة المناظرة عندما تكون n عددًا سالبًا.

(4) تعرف **دالة بيتا** (beta function) بأنها

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad , \quad x>0, y>0$$

(i) استخدم التحويل $u = \frac{t}{1-t}$ للحصول على

$$\beta(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

(ii) أثبت أن

$$\Gamma(z) = s^z \int_0^\infty e^{-st} t^{z-1} dt$$

(iii) بوضع $s = 1 + u$ ، $z = x + y$ استنتج أن

$$\frac{1}{(1+u)^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-(1+u)t} t^{x+y-1} dt$$

ثم استخدم (i) للحصول على العلاقة

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

(5) أثبت أن $\beta(x,x) = 2^{1-2x} \beta(x, \tfrac{1}{2})$

(6) أثبت أن $2^{2x} \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(2x)} = 2\pi$

(7) تعرَّف **دالة الخطأ** (error function) على $\mathbb{R}$ بالتكامل

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

أثبت الخواص التالية لهذه الدالة

(i) $\lim_{x \to \pm\infty} \text{erf}(x) = \pm 1$

(ii) $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$ وارسم الدالة $\text{erf}(x)$

(iii) erf دالة تحليلية على $\mathbb{R}$ (أوجد منشور تيلور حول $x = 0$).

(5.2) دوال بيسل من النوع الأول

تعتبر **معادلة بيسل**

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad (5.3)$$

حيث $\nu \geq 0$ ، من أهم المعادلات التفاضلية ذات الدلالة الفيزيائية ، ونظرا لأن $x = 0$ نقطة شاذة للمعادلة فإنه لا يجوز تمثيل الحل بمتسلسلة قوى حول هذه النقطة. وسنلجأ بدلا عن ذلك إلى ما يسمى **بطريقة فروبينيوس**، نسبة إلى الرياضي الألماني

G. Frobenius (1849-1917) ، لإيجاد الحل بدلالة قوى x. وهذه الطريقة تستند إلى أن كل معادلة على الصورة

$$y'' + \frac{q(x)}{x} y' + \frac{r(x)}{x^2} y = 0$$

حيث q و r دالتان تحليليتان عند x = 0 لها حل ممثل بالمتسلسلة

$$y(x) = x^t \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = x^t (c_0 + c_1 + c_2 x^2 + \cdots) \tag{5.4}$$

حيث t عدد حقيقي (أو مركب) والثابت $c_0 \neq 0$ (انظر [10]). واضح أن الصيغة (5.4) تتحول إلى متسلسلة قوى عندما يكون t عددًا صحيحًا غير سالب، وتمثل تعميما لمتسلسلة القوى فيما عدا ذلك.

بالتعويض عن y في المعادلة (5.3) بالصيغة (5.4) نجد أن

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+t)(k+t-1) c_k x^{k+t} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+t) c_k x^{k+t}$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+t+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+t} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+t)^2 c_k x^{k+t} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+t+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+t} = 0$$

وبتجميع معاملات القوى x^t ، x^{t+1} ، x^{t+2} ، ... ، x^{t+j} على الترتيب نحصل على المعادلات التالية

$$t^2 c_0 - \nu^2 c_0 = 0 \tag{5.5}$$

$$(t+1)^2 c_1 - \nu^2 c_1 = 0 \tag{5.6}$$

$$(t+2)^2 c_2 - \nu^2 c_2 + c_0 = 0$$

$$\cdots$$

$$(t+j)^2 c_j - \nu^2 c_j + c_{j-2} = 0 \tag{5.7}$$

نستنتـــج من المعادلة (5.5) أن $t = \pm\nu$ لأن $c_0 \neq 0$، وسنسعى أولا للحصـول علـى حل معادلة بيسل الناتج من اختيار $t = \nu$:

من المعادلة (5.6) نرى أن

$$(\nu+1)^2 c_1 - \nu^2 c_1 = (2\nu+1)c_1 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 0$$

لأن $2\nu + 1 \geq 1$. ومن المعادلة (5.7) نحصل على

$$[(\nu+j)^2 - \nu^2]c_j + c_{j-2} = 0$$

$$j(j+2\nu)c_j + c_{j-2} = 0$$

$$\Rightarrow c_j = -\frac{1}{j(j+2\nu)}c_{j-2} \quad , \quad j = 2, 3, 4, \ldots \tag{5.8}$$

وبالنظر إلى أن $c_1 = 0$ فإن $c_j = 0$ لكل قيم j الفرديـــة. لنفرض إذن أن $j = 2m$ ونعيد كتابة العلاقة (5.8) بالصورة

$$c_{2m} = -\frac{1}{2m(2m+2\nu)}c_{2m-2} = -\frac{1}{2^2 m(\nu+m)}c_{2m-2} \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

بما يمكّننا من التعبير عن المعاملات c_2، c_4، c_6، ... بدلالة c_0:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(\nu+1)}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2 2(\nu+2)} = \frac{c_0}{2^4 2!(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$c_6 = -\frac{c_0}{2^6 3!(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

$$\ldots$$

$$c_{2m} = -\frac{(-1)^m c_0}{2^{2m} m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)} \tag{5.9}$$

حيث c_0 ثابت اختيـاري. وبذلـك نحصـل علـى الحـل $x^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}x^{2m}$ لمعادلـة بيسل. نعرف دالة بيسل بأنها المتسلسة (5.4) حيث الثابت

$$c_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} \tag{5.10}$$

فيترتب على ذلك أن

$$c_2 = -\frac{1}{2^{\nu+2}(\nu+1)\Gamma(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{\nu+2}\Gamma(\nu+2)}$$

$$c_4 = \frac{1}{2^{\nu+4}2!\Gamma(\nu+3)}$$

$$c_6 = -\frac{1}{2^{\nu+6}3!\Gamma(\nu+4)}$$

$$\cdots$$

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m}m!\Gamma(\nu+m+1)}$$

وبذلك نحصل على الحل الخاص لمعادلة بيسل الذي ينشأ من الاختيار (5.10)

$$J_{\nu}(x) = x^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}m!(m+\nu+1)}x^{2m}$$

$$= (\frac{x}{2})^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}(\frac{x}{2})^{2m} \tag{5.11}$$

ويسمى **دالة بيسل من النوع الأول** (Bessel function of the first kind) ذات الرتبة ν. وبالامكان التحقق من تقارب المتسلسلة

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}m!\Gamma(m+\nu+1)}x^{2m}$$

على $\mathbb{R}$ باستخدام اختبار النسبة. لكن x^{ν} معرفة كدالة حقيقية عند قيم x الموجبة ، كما أن

$$\lim_{x\to 0^+} J_{\nu}(x) = J_{\nu}(0) = \begin{cases} 1 & , \quad \nu = 0 \\ 0 & , \quad \nu > 0 \end{cases}$$

فنخلص إلى أن J_ν دالة متصلة على $[0,\infty)$ لكل $\nu \geq 0$.

وإذا وضعنا $t = -\nu$ في الصيغة (5.4)، أي إذا أبدلنا ν بـ $-\nu$ في التمثيل (5.11) فإن

$$J_{-\nu}(x) = (\frac{x}{2})^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2m} \qquad (5.12)$$

يظل حلا للمعادلة (5.3) لأن المعادلة لا تتأثر بهذا التغيير، لكن هذا الحل قد لا يكون محدودا في جوار $x = 0$ كما سنرى الآن.

نظرية (5.1)

تكون الدالتان J_ν و $J_{-\nu}$ مستقلتين خطيًّا إذا وفقط إذا كان ν ليس عددًا صحيحًا.

البرهان

(i) لنفرض أولا أن $\nu = n \in \mathbb{N}_0$، فنجد أن

$$J_{-n}(x) = (\frac{x}{2})^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-n+1)}(\frac{x}{2})^{2m}$$

لكن $\frac{1}{\Gamma(m-n+1)} = 0$ لكل $m - n + 1 \leq 0$، فتتلاشى الحدود من $m = 0$ إلى $m = n - 1$ في المتسلسلة ونحصل على

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= (\frac{x}{2})^{-n}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-n+1)}(\frac{x}{2})^{2m} \\ &= (\frac{x}{2})^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\Gamma(m+1)}(\frac{x}{2})^{2m+2n} \\ &= (-1)^n(\frac{x}{2})^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+n+1)}(\frac{x}{2})^{2m} \\ &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

(ii) لنفرض الآن أن $\nu \notin \mathbb{N}_0$ وأن

$$aJ_\nu(x) + bJ_{-\nu}(x) = 0 \quad \forall x > 0 \tag{5.13}$$

بأخذ النهاية عندما $x \to 0^+$ لطرفي هذه المتطابقة نجد أن $\lim_{x\to 0^+} J_\nu(x) = 0$ بينما

$$\lim_{x\to 0^+} |J_{-\nu}(x)| = \infty$$

لأن الحد الأول في المتسلسلة (5.12)، وهو $\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}(\frac{x}{2})^{-\nu}$ ، يطغى على بقية الحدود ويسعى إلى $\pm\infty$ حسب إشارة $\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}$. فنستنتج من ذلك أن المساواة (5.13) لن تتحقق على $(0,\infty)$ إلا إذا كان $b = 0$، وعندئذ لابد أن يكون $a = 0$ أيضا.

□

نتيجة (5.1.1)

إذا كان ν ليس عددًا صحيحًا فإن الحل العام لمعادلة بيسل على الفترة $(0,\infty)$ هو

$$y(x) = c_1J_\nu(x) + c_2J_{-\nu}(x)$$

أما إذا كان ν عددًا صحيحًا فإننا نحصل على الحل العام بعد تعريف دالة بيسل من النوع الثاني في البند (5.3).

من الصيغة (5.11) نرى أن

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2}(\frac{x}{2})^{2m}$$

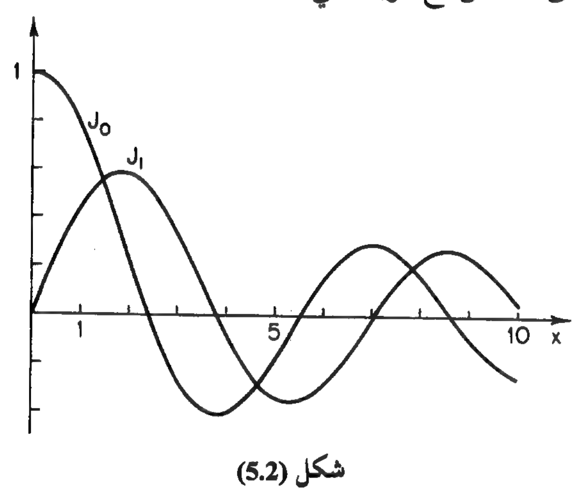
$$= 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \cdots$$

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}(\frac{x}{2})^{2m+1}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 1!2!} + \frac{x^5}{2^5 2!3!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + \cdots$$

ونلاحظ على الفور أوجه الشبه والاختلاف بين هاتين المتسلسلتين من جهة ومنشوري تيلور للدالتين $\cos x$ و $\sin x$ من جهة أخرى. وهذا ما يوضحه الرسم البياني لدالتي بيسل J_0 و J_1 في الشكل (5.2)، حيث يوحي الشكل العام للمنحنيين بصحة العلاقة $J'_0(x) = -J_1(x)$ المناظرة للعلاقة $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.

ولكن، من جهة أخرى، نلاحظ أن توزيع الأصفار للدالتين J_0 و J_1 غير منتظم، كما أن ارتفاع المنحنى يتناقص مع الزيادة في x.



شكل (5.2)

مثال (5.1)

فيما يلي سنثبت العلاقة

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

وهي تعمِّم العلاقة المذكورة أعلاه بين J_0 و J_1:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

$$xJ'_n(x) = x\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+n)}{m!(m+n)!2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+n)}{m!(m+n)!} (\frac{x}{2})^{2m+n}$$

$$= nJ_n(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m}{m!(m+n)!} (\frac{x}{2})^{2m+n}$$

$$= nJ_n(x) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+2)}{(m+1)!(m+n+1)!} (\frac{x}{2})^{2m+n+2}$$

$$= nJ_n(x) - x\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+1)}{(m+1)!(m+n+1)!} (\frac{x}{2})^{2m+n+1}$$

$$= nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

مثال (5.2)

سنثبت فيما يلي أن

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \qquad \forall \nu \geq 0 \tag{5.14}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(m+\nu+1)} x^{2m}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(m+\nu+1)} x^{2m-1}$$

$$= -x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu+1} m!\Gamma(m+\nu+2)} x^{2m+\nu+1}$$

$$= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

وجدنا في المثال (2.3) في الفصل الثاني أن كل فترة جزئية من $(0,\infty)$ بطول π فيها صفر واحد على الأقل لأي حل لمعادلة بيسل من الرتبة ν حيث $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$.

فنستنتج من ذلك أن للدالة J_0 متتالية من الأصفار

$$\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \cdots$$

بحيث $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=\infty$ والمسافة بين أي صفرين متجاورين لا تتجاوز 2π. لاحظ في الشكل (5.2) أن

$$\xi_1\approx 2.4\ ,\ \xi_2\approx 5.5\ ,\ \xi_3\approx 8.7\ ,\ \xi_4\approx 11.8\ ,\ \ldots$$

من نظرية رول (انظر [1]) نعلم أن بين كل صفرين متجاورين ξ_k ، ξ_{k+1} للدالة $J_0(x)$ يوجد صفر واحد على الأقل للدالة $J'_0(x)$، فتستنتج من المتطابقة (5.14) أن للدالة $J_1(x)$ صفر واحد على الأقل بين كل صفرين متتاليين من أصفار J_0 (انظر الشكل (5.2))، أي أن أصفار J_1 هي الأخرى متتالية غير منتهية تؤول إلى ∞. وبالاستقراء على $\nu=n$ في العلاقة (5.14)، وملاحظة أن $x^{-n}J_{n+1}=0$ إذا وفقط إذا كان $J_{n+1}(x)=0$ نكون قد أثبتنا

نظرية (5.2)

لكل $n\in\mathbb{N}_0$ تشكل أصفار الدالة $J_n(x)$ في $(0,\infty)$ متتالية غير منتهية

$$\xi_{n1}<\xi_{n2}<\xi_{n3}<\cdots$$

بحيث $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_{nk}=\infty$.

مثال (5.3)

سنثبت الآن صحة المساواة

$$\int_0^c xJ_0(x)dx=cJ_1(c)\qquad\forall c>0$$

التي سنحتاج إليها فيما بعد.

$$\int_0^c xJ_0(x)dx=\int_0^c\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\frac{x^{2m+1}}{2^{2m}}dx$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\frac{c^{2m+2}}{(2m+2)2^{2m}}$$

$$= c\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)(m+1)!}\left(\frac{c}{2}\right)^{2m+1}$$

$$= cJ_1(c)$$

حيث استندنا في إجراء عملية التكامل على حدود المتسلسلة إلى أن متسلسلة القوى متقاربة بانتظام على أي فترة محدودة.

تمارين (5.2)

(1) تحقق من تقارب متسلسلة القوى التي تمثل $x^{-\nu}J_\nu(x)$ على $\mathbb{R}$ لكل $\nu \geq 0$.

(2) تحقق من أن $J_n(x)$ قابلة للتمديد إلى دالة زوجية على $\mathbb{R}$ إذا كان n عددا زوجيا، وإلى دالة فردية إذا كان n فرديا.

(3) أثبت أن

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad , \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

(4) أثبت أن $xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)$

واستخلص من ذلك نتيجة المثال (5.1).

(5) استخدم نتيجة التمرينين (3) و (4) للحصول على

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

(6) أثبت أن

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

واستخلص من ذلك أن

$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right)$$

(7) استخدم نتيجة المثال (5.2) والتمرين (6) للحصول على

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2}[J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)]$$

(8) أثبت أن

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

(9) أثبت أن

$$\text{(i)} \quad \int_0^x t^2 J_1(t)dt = 2xJ_1(x) - x^2 J_0(x)$$

$$\text{(ii)} \quad \int_0^x J_3(t)dt = 1 - J_2(x) - \frac{2}{x} J_1(x)$$

(10) استخدم العلاقتين $(xJ_1)' = xJ_0$ و $J'_0 = -J_1$ لإثبات المساواة

$$\int_0^x t^n J_0(t)dt = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^2 \int_0^x t^{n-2} J_0(t)dt$$

(11) أثبت أن دالة الرونسكيان $W = W(J_\nu, J_{-\nu})$ ، حيث $\nu \notin \mathbb{N}_0$ ، تحقق المعادلة $W' = -W/x$ ثم أوجد صيغة $W(x)$.

(5.3) دوال بيسل من النوع الثاني

بالنظر إلى النتيجة (5.1.1) فإن من الطبيعي أن نتساءل عن صيغة الحل العام لمعادلة ليسل عندما يكون ν عددًا صحيحًا، أي ما هي الدالة المستقلة عن J_n ، حيث $n \in \mathbb{N}_0$ ، التي تحقق معادلة بيسل؟ هناك أكثر من طريقة للحصول على حل آخر، مشتقل عن J_n ، لمعادلة بيسل (راجع التمرين 5.3.1)، وسنعتمد هنا الأسلوب الأكثر شيوعا.

لنعرف الدالة

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}[J_\nu(x)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)] \quad , \quad \nu \neq 0, 1, 2, \ldots \tag{5.15}$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ونلاحظ الآتي :

(i) لقيم ν غير الصحيحة واضح أن Y_ν تحقق معادلة بيسل لأنها تركيب خطي من حلّيها J_ν و $J_{-\nu}$. وبما أن $J_{-\nu}$ مستقلة خطيا عن J_ν فإن Y_ν أيضا مستقلة خطيا عن J_ν.

(ii) عند قيم n الصحيحة يتحول الطرف الأيمن من (5.15) إلى الصيغة غير المعينة $\frac{0}{0}$ ، وبتطبيق قاعدة لوبيتال نجد أن (انظر [13])

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}$$

$$= \frac{2}{\pi}(\log\frac{x}{2} + \gamma)J_n(x) + \frac{1}{\pi}(\frac{x}{2})^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}(h_m + h_{m+n})}{m!(m+n)!}(\frac{x}{2})^{2m}$$

$$-\frac{1}{\pi}(\frac{x}{2})^{-n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!}(\frac{x}{2})^{2m} \quad , \quad x > 0 \qquad (5.16)$$

حيث

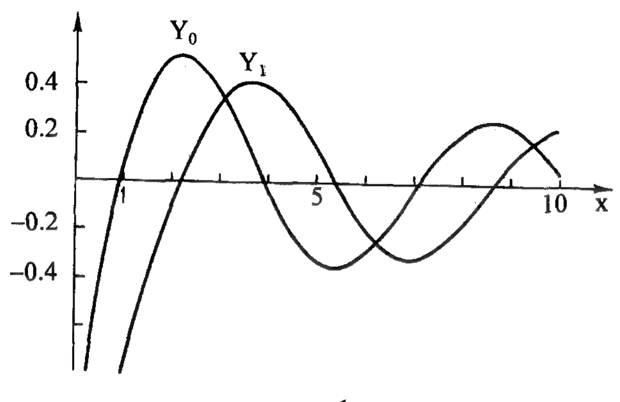
$$h_0 = 0 \ , \ h_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$$
$$\gamma = \lim_{k\to\infty}(h_k - \log k) = 0.577215\ldots$$

ويسمى العدد γ **ثابت أويلر** (Euler's constant)، مع ملاحظة أن المجموع الأخير في الطرف الأيمن من (5.16) يساوي الصفر عندما $n = 0$. ونظرًا لوجود $\log x\, J_n(x)$ في الطرف الأيمن من (5.16) فإن Y_n مستقلة خطيا عن J_n.

بناء على ذلك فإن الحل العام لمعادلة بيسل لجميع قيم ν هو

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$$

حيث يعْرَف Y_ν بأنه **دالة بيسل من النوع الثاني** ذات الرتبة ν ، وفي الشكل (5.3) التمثيل البياني للدالتين Y_0 و Y_1.



شكل (5.3)

لاحظ من الصيغة (5.16) أن سلوك الدالة $Y_0(x)$ عندما $x \to 0^+$ يقترب من سلوك الدالة $\frac{2}{\pi}\log x$ ، بمعنى أن

$$\frac{Y_0(x)}{\frac{2}{\pi}\log x} \to 1$$

عندما $x \to 0^+$ ، ونعبر عن ذلك بكتابة

$$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\log x \tag{5.17}$$

عندما $x \to 0^+$. ويمكن أيضا أن نفسر العبارة (5.17) بأنها تعني أن الحد الأول $\frac{2}{\pi}\log x$ يطغى على بقية الحدود في الطرف الأيمن من (5.16) عندما يقترب x من 0 لأن بقية الحدود محدودة في جوار $x = 0$. وبالمثل نجد أن

$$Y_1(x) \sim -\frac{2}{\pi}\frac{1}{x} \tag{5.18}$$

عندما $x \to 0^+$، حيث يمثل الطرف الأيمن من (5.18) الحد الثالث في التمثيل (5.16) عندما $n = 1$.

تمارين (5.3)

(1) افرض أن $y(x) = u(x)J_n(x)$ وعوض في معادلة بيسل (5.3) للحصول على حل آخر

$$J_n(x)\int_c^x \frac{1}{tJ_n^2(t)}$$

لمعادلة بيسل مستقل عن $J_n(x)$.

(2) تحقق من صحة السلوك التقاربي (5.16) و (5.17) للدالتين Y_0 و Y_1 في جوار $x = 0$.

(3) عين السلوك التقاربي للدوال J_n و Y_n ، لكل $n\in\mathbb{N}$، في جوار $x = 0$.

(4) أثبت أن

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu}Y_{\nu}(x)] = x^{\nu}Y_{\nu-1}(x)$$

(5) أثبت أن

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}Y_{\nu}(x)] = -x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x)$$

واستنتج من ذلك أن أصفار الدالة Y_n في $(0,\infty)$ متتالية غير منتهية ومتزايدة إلى ∞.

(6) تعرف الدالة I_ν بالقاعدة

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J(ix) \quad , \nu\geq 0$$

حيث $i = \sqrt{-1}$. أثبت أن I_ν تحقق المعادلة

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0 \qquad (5.19)$$

(7) استنتج من تعريف I_ν في التمرين (6) أن I_ν دالة حقيقية ممثلة بالمتسلسلة

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2m+\nu}$$

(8) أثبت أن $I_\nu(x) \neq 0$ لكل $x > 0$ وأن $I_{-n}(x) = I_n(x)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(9) أثبت أن الدالة

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]$$

أيضا تحقق المعادلة (5.19).

ملحوظة: تسمى I_ν وK_ν **دوال بيسل المحوَّرة** (modified Bessel functions) من النوع الأول والثاني، على الترتيب، ذوات الرتبة ν.

(5.4) بعض الصيغ التكاملية للدالة J_n

سنثبت أولا أن الدالة المولِّدة لدالة بيسل J_ν هي

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n \quad \forall z \neq 0 \tag{5.20}$$

وذلك بملاحظة أن

$$e^{xz/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j$$

$$e^{x/2z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! z^k}\left(\frac{x}{2}\right)^k$$

وأن هاتين المتسلسلتين متقاربتان مطلقا، مما يسمح لنا بكتابة

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{j! k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j+k} z^{j-k}$$

وبالتعويض $j - k = n$، مع مراعاة أن $\frac{1}{(k+n)!} = \frac{1}{\Gamma(k+n+1)} = 0$ عندما $k + n < 0$، نجد أن

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\right] z^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n$$

بما يثبت المساواة (5.20). والآن بالتعويض $z = e^{i\theta}$ نحصل على

$$\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z}) = i\sin\theta$$

$$\Rightarrow\ e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\theta} \qquad (5.21)$$

وبما أن الدالة $e^{ix\sin\theta}$ دورية في 2π وتحقق شروط النظرية (3.2) فإن الطرف الأيمن يمثل منشور فوريير، بالصيغة الأسية، لهذه الدالة. إذن

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta}e^{-in\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta-n\theta)}d\theta$$

ونظرا لأن الطرف الأيسر من هذه المعادلة دالة حقيقية، فمن الواضح أن

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta \qquad (5.22)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

وهي الصيغة التكاملية الأولى للدالة J_n. ومنها نحصل على حدود نمو الدالة J_n

$$|J_n(x)| \le \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}d\theta = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad (5.23)$$

وهي نتيجة ليس من اليسير الحصول عليها انطلاقا من تعريف J_n.

بالرجوع إلى المعادلة (5.21)، ومساواة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لطرفيها، نجد أن

$$\cos(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos n\theta \qquad (5.24)$$

$$\sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta \qquad (5.25)$$

وبالاستفادة من العلاقة $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ نرى أن المجموع

$$J_n(x)\cos nx + J_{-n}(x)\cos(-n)x$$

يساوي الصفر إن كان n عددا فرديا ويساوي $2J_n(x)\cos nx$ إن كـان n عـددا زوجيـا ، فنحصل من (5.24) على

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x)\cos 2mx \qquad (5.26)$$

وبالمثل فإن

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(x)\sin(2m-1)\theta \qquad (5.27)$$

وبـالنظر إلـى أن الطرف الأيمـن في كـل مـن (5.26) و (5.27) علـى صـورة متسلسـلة فورييه، الأول للدالة الزوجية $\cos(x\sin\theta)$ والثاني للدالة الفردية $\sin(x\sin\theta)$ ، فإن

$$J_{2m}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos 2m\theta d\theta \quad , \quad m \in \mathbb{N}_0 \qquad (5.28)$$

$$J_{2m-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin(2m-1)\theta d\theta \quad , \quad m \in \mathbb{N} \qquad (5.29)$$

ومن هاتين المعادلتين نرى أن $J_0(0) = 1$ وأن $J_n(0) = 0$ لكل $n \geq 1$.

تمارين (5.4)

(1) أثبت أن

$$\frac{d^k}{dx^k}J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^k\theta\cos(x\sin\theta - n\theta + \frac{k\pi}{2})d\theta \quad , \; n \in \mathbb{N}_0 \; , \; k \in \mathbb{N}$$

واستنتج من ذلك أن $|J_n^{(k)}(x)| \leq 1$ لكل $x \geq 0$.

(2) أثبت ما يلي :

(i) $J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) = 1$

(ii) $\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)J_{2m-1}(x) = \frac{x}{2}$

(3) أثبت المتطابقة

$$J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1$$

(4) استخدم المعادلتين (5.28) و(5.29) للحصول على

$$J_{2m}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\cos 2m\theta d\theta \quad , \quad m \in \mathbb{N}_0$$

$$J_{2m-1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(x\sin\theta)\sin(2m-1)\theta d\theta \quad , \quad m \in \mathbb{N}$$

(5) أثبت أن

$$\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin 2m\theta d\theta = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

(6) أثبت المتطابقات

(i) $\cos\theta = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \cdots$

(ii) $\sin x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \cdots$

(iii) $1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots$

(7) أثبت أن $\lim_{n\to\infty} J_n(x) = 0$.

(5.5) تعامد دوال بيسل

بعد القسمة على x، حيث $0 < x$، تتحول معادلة بيسل (5.3) إلى الصيغة القياسية لمعادلة شتورم - ليوفيل

$$xy'' + y' + (x - \frac{v^2}{x})y = 0 \tag{5.30}$$

حيث المؤثر التفاضلي

$$L = \frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}) - \frac{v^2}{x}$$

قرين لذاته شكلاً والدالة $w(x) = x$ تمثل دالة الثقل في المعادلة. إلا أن المقارنة مع الصيغة (2.32) تبين أن متغير القيمة الذاتية λ لا يظهر بشكل صريح في المعادلة. ولكن بالتعويض

$$u(x) = y(\alpha x)$$
$$u'(x) = \alpha y'(\alpha x)$$
$$u''(x) = \alpha^2 y''(\alpha x)$$

تتحول المعادلة (5.30) إلى الصيغة

$$xu'' + u' + (\alpha^2 x - \frac{\nu^2}{x})u = 0 \tag{5.31}$$

حيث $p(x) = x$ ، $r(x) = -\nu^2 / x$ ، $\lambda = \alpha^2$.

لنفرض أن المعادلة (5.31) أعطيت على الفترة الحقيقية $(0,b)$. بما أن $p(0) = 0$ فليس من المطلوب فرض شرط حدي عند $x = 0$ سوى وجود النهاية $\lim_{x \to 0^+} u(x)$. أما عند $x = b$ فنفرض كالعادة أن

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \tag{5.32}$$

لنحصل على مسألة شتورم ـ ليوفيل المكونة من المعادلتين (5.31) و(5.32). هذه المسألة، بناء على ما تقدم، لها مجموعة متعامدة وتامة من الحلول في $\mathcal{L}^2(0,b;x)$.

سنقصر اهتمامنا في هذه المعالجة على قيم λ الصحيحة فنحصل بذلك على الحل العام للمعادلة (5.31)

$$u(x) = c_1 J_n(\alpha x) + c_2 Y_n(\alpha x)$$

ولضمان وجود النهاية $\lim_{x \to 0^+} u(x)$ لا بد أن تكون $c_2 = 0$ ، فيكون حل المعادلة (5.31) الذي يهمنا في هذا السياق هو الدالة $J_n(\alpha x)$.

لنبدأ بالحالة الخاصة من (5.32) عندما يكون $\beta_2 = 0$ ، وهي

$$u(b) = 0 \tag{5.33}$$

فينتج عن تطبيق هذا الشرط على الحل $J_n(\alpha x)$ أن

$$J_n(\alpha b) = 0 \tag{5.34}$$

وقد وجدنا في النظرية (5.2) أن أصفار الدالة J_n في $(0,\infty)$ متتالية متزايدة وغير محدودة

$$\xi_{n1} < \xi_{n2} < \xi_{n3} < \cdots$$

فيترتب على تطبيق الشرط الحدي (5.34) أن

$$\alpha_k b = \xi_{nk}$$

وأن القيم الذاتية للمعادلة (5.31) هي

$$\lambda_k = \alpha^2_k = (\xi_{nk}/b)^2 \ , \ k = 1\ , 2\ , 3\ , \ldots \qquad (5.35)$$

لاحظ أن الصفر الأول $\xi_{n0} = 0$ للدالة J_n، حيث $n \geq 1$، لا يعطي قيمة ذاتية لأن "الدالة الذاتية" المناظرة

$$J_n(\alpha_0 x) = J_n(0) = 0 \quad \forall\ n \geq 1$$

وكما هو معلوم فإن الدالة الصفرية غير مقبولة كدالة ذاتية. وبناء عليه فإن الدوال الذاتية المناظرة للقيم الذاتية (5.35)

$$0 < \lambda_1 = \alpha_1^2 < \lambda_2 = \alpha_2^2 < \lambda_3 = \alpha_3^2 < \cdots$$

هي المجموعة

$$J_n(\alpha_1 x)\ , J_n(\alpha_2 x)\ , J_n(\alpha_3 x)\ , \ldots$$

وهي بالضرورة متعامدة وتامة في $\mathcal{L}^2(0,b)$ بالنسبة الثقل x. أي أن لكل $n \in \mathbb{N}_0$

$$\langle J_n(\alpha_j x), J_n(\alpha_k x)\rangle = \int_0^b J_n(\alpha_j x) J_n(\alpha_k x) x dx = 0 \quad \forall j \neq k$$

كما أن لكل $n \in \mathbb{N}_0$ ولكل $f \in \mathcal{L}^2(0,b)$

$$f(x) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f(x), J_n(\alpha_k x)\rangle}{\|J_n(\alpha_k x)\|^2} J_n(\alpha_k x) \qquad (5.36)$$

وسنسعى الآن لايجاد قيمة $\|J_n(\alpha x)\|$.

بضرب معادلة بيسل (5.31) في $2xu'$ نجد أن

$$2xu'(xu')' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)2uu' = 0$$

$$[(xu')^2]' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)(u^2)' = 0$$

وبعد إجراء التكامل على الفترة $(0,b)$ نحصل على

$$(xu')^2\Big|_0^b + \alpha^2\left[x^2u^2\Big|_0^b - 2\int_0^b xu^2dx\right] - \nu^2u^2\Big|_0^b = 0$$

وعندما يكون $u(x) = J_\nu(\alpha x)$، $u'(x) = \alpha J'_\nu(\alpha x)$، حيث $\alpha > 0$ و $\nu \geq 0$ فإن

$$||J_\nu(\alpha x)||^2 = \int_0^b J_\nu^2(\alpha x)xdx$$

$$= \frac{1}{2}b^2[J'_\nu(\alpha b)]^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2b^2 - \nu^2}{\alpha^2}J_\nu^2(\alpha b) \qquad (5.37)$$

فإذا كان $\nu = n$ وانطبق الشرط الحدي (5.34) أصبح لدينا

$$||J_n(\alpha x)||^2 = \frac{1}{2}b^2[J'_n(\alpha b)]^2$$

فنحصل من مثال (5.1) على

$$J'_n(\alpha b) = \frac{1}{\alpha b}[nJ_n(\alpha b) - \alpha bJ_{n+1}(\alpha b)]$$

$$= -J_{n+1}(\alpha b)$$

$$\Rightarrow \quad ||J_n(\alpha x)||^2 = \frac{b^2}{2}J_{n+1}^2(\alpha b) \qquad (5.38)$$

مثال (5.4)

للحصول على منشور بيسل للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \ , & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

بالشرط $J_0(4\alpha) = 0$ نبدأ بإيجاد

$$\langle f(x),J_0(\alpha_k x)\rangle=\int_0^2 J_0(\alpha_k x)xdx$$
$$=\frac{1}{\alpha_k^2}\int_0^{2\alpha_k}J_0(y)ydy$$
$$=\frac{2}{\alpha_k}J_1(2\alpha_k)$$

حيث استفدنا من نتيجة المثال (5.3) في تقويم التكامل. ثم نرى من (5.38) أن

$$\|J_0(\alpha_k x)\|^2=8J_1^2(4\alpha_k)$$

وأخيرًا نحصل من (5.36) على المنشور المطلوب

$$f(x)\doteq\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(2\alpha_k)}{\alpha_k J_1^2(4\alpha_k)}J_0(\alpha_k x)$$

لاحظ أن قيمة المتسلسلة عند $x=2$ تساوي

$$\frac{1}{2}[f(2^+)+f(2^-)]=\frac{1}{2}$$

أي أن

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(2\alpha_k)J_0(2\alpha_k)}{\alpha_k J_1^2(4\alpha_k)}=2$$

حيث $\{4\alpha_k : k\in\mathbb{N}\}$ هي أصفار الدالة J_0.

تمارين (5.5)

أوجد منشور بيسل من النـــوع $\sum c_k J_0(\alpha_k x)$ ، حيث α_k هي حلول $J_0(\alpha b)=0$ الموجبة ، للدالة f المعرفة على $[0,b]$ في التمارين من (1) إلى (5):

(1) $f(x)=1$

(2) $f(x)=x$

(3) $f(x)=x^2$

(4) $f(x) = b^2 - x^2$

(5) $f(x) = 1$ لكل $x \in (0, b/2)$ ، $f(x) = 0$ لكل $x \in (b/2, b)$

(6) أوجد تمثيل الدالة $f(x) = 1$ بدلالة دوال بيسل $J_0(\alpha_k x)$ حيث α_k هي حلول $J_0'(\alpha b) = 0$ الموجبة.

(7) أثبت أن $\lambda = \alpha^2 = 0$ قيمة ذاتية للمعادلة (5.31) بالشرط الحدي (5.32) إذا وفقط إذا كان $\frac{\beta_1}{\beta_2} \geq -\frac{\nu}{b}$ ، وأن الدالة الذاتية المناظرة لهذه القيمة هي x^ν.

(8) إذا كان $\beta_2 = 0$ أو إذا كان $\frac{\beta_1}{\beta_2} \geq -\frac{\nu}{b}$ فأثبت أنه لا يوجد قيم ذاتية سالبة للمسألة (5.31)، (5.32).

(9) احسب $\|J_\nu(\alpha x)\|^2$ بالشرط الحدي (5.32) مطبقا على $J_\nu(\alpha x)$.

(10) أوجد منشور الدالة $f(x) = x$ على الفترة $[0,1]$ بدلالة $J_1(\alpha_k x)$ حيث α_k هي أصفار J_1 الموجبة.

(11) أوجد منشور الدالة $f(x) = x^n$ على $[0,1]$ بدلالة $J_n(\alpha_k x)$ حيث $n \in \mathbb{N}$ والأعداد α_k هي أصفار J_n' الموجبة.

(12) افرض أن

$$f(x) = \begin{cases} x \quad , & x \in (0,1) \\ 0 \quad , & x \in (1,2) \end{cases}$$

أوجد المتسلسلة $\sum c_k J_1(\alpha_k / 2x)$ التي تمثل f على $[0,2]$، علما بأن α_k هي أصفار J_1'.

(13) تسمى المعادلة

$$u_t = k \, \Delta \, u$$

حيث

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (5.39)$$

مؤثر لابلاس و t متغير الزمن ، **معادلة الحرارة** (heat equation)، وفيها تمثل $u(x,y,z,t)$ درجة الحرارة عند النقطة (x,y,z) واللحظة t. في الإحداثيات القطبية (r,θ) على المستوي $z = 0$ تأخذ المعادلة (5.39) الشكل

$$u_t = k(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta})$$

افرض أن الدالة u مستقلة عن θ وأن $u(r,t) = v(r)w(t)$ ، ثم استنتج أن

$$v'' + \frac{1}{r}v' + \lambda^2 v = 0$$

$$w' + \lambda^2 kw = 0$$

حيث λ عدد ثابت.

(14) في التمرين (13) افرض أن درجة الحرارة $u(r,t)$ على القرص المستوي $0 \le r \le 1$ تحقق $u(1,t) = 0$ ، أي أنها تساوي الصفر على حافة القرص. أثبت أن

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 kt} J_0(\lambda_n r) \qquad (5.40)$$

حيث $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ أصفار الدالة J_0.

(15) إذا كان توزيع درجة الحرارة على القرص عند اللحظة $t = 0$ هو $u(r,0) = f(r)$ حيث f دالة معلومة ، فأثبت أن **معاملات فوريير - بيسل** في الصيغة (5.40) هي

$$A_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 f(r) J_0(\lambda_n r) r dr$$

(16) في الإحداثيات الاسطوانية (r,θ,z) تأخذ معادلة لابلاس الصورة

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2} + u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0$$

(i) استخدم فصل المتغيرات للحصول على الحل

$$u(r,\theta,z) = [J_\nu(\alpha r) + AY_\nu(\alpha r)](B\cos\nu\theta + \sin\nu\theta)(e^{-\alpha z} + Ce^{\alpha z})$$

(ii) على افتراض أن $\nu \geq 0$ وأن $\alpha > 0$ استنتج صيغة الحل المحدود على الاسطوانة $\{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z\}$.

(iii) على افتراض أن الدالة u أحادية القيمة في المتغير θ فما هي قيم n المسموح بها؟

الفصل السادس

تحويل فوريير

يمكن اعتبار الرابط الأساسي بين مواضيع الفصول السابقة هو إمكانية نشر الدوال في $\mathcal{L}^2$ بمتسلسلات من الدوال التي تنشأ من حلول مسألة شتورم ـ ليوفيل. لكننا في هذا الفصل سننتقل من المتسلسلات إلى **التحويلات التكاملية** (integral transforms)، وهي امتداد لمفهوم المتسلسلات، توفر وسيلة أخرى لتمثيل الدالة، تحت شروط معينة، كما توفر وسيلة فعالة لحل المعادلات التفاضلية. سنقصر اهتمامنا في هذه المعالجة على تحويل فوريير المستمد من سلسلة فوريير، ومنه نحصل على تحويل لابلاس بنقلة شكلية بسيطة.

(6.1) تحويل فوريير

لنفرض أن f دالة في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$، فهي إذن تنتمي إلى $\mathcal{L}^2(-\ell,\ell)$ لأي $\ell > 0$. وبالاستناد إلى النتيجة (3.1.1) تكون f قابلة للتمثيل على الفترة $(-\ell,\ell)$ بمتسلسلة فوريير

$$f(x) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/\ell} \tag{6.1}$$

حيث

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-in\pi x/\ell}dx \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \tag{6.2}$$

لنفرض أن $\Delta\xi = \pi/\ell$ وأن $\xi_n = n\Delta\xi = n\pi/\ell$. عندئذ تتحول الصيغتان (6.1) و (6.2) إلى الصورة

$$f(x) \doteq \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C(\xi_n)e^{i\xi_n x}\Delta\xi \tag{6.3}$$

$$C(\xi_n) = 2\ell c_n = \int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\xi_n x}dx \tag{6.4}$$

إذا سمحنا للعدد ℓ بأن يتزايد بدون حدود فإن المتغير المتقطع ξ_n يقترب من متغير مستمر ξ وتقترب الصيغة (6.4) من الشكل

$$C(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \tag{6.5}$$

أما في (6.3) فنلاحظ أن الطرف الأيمن يشبه إلى حد كبير مجموع ريمان الذي يؤول في النهاية، عندما $\ell \to \infty$، إلى

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{6.6}$$

وبذلك تتحول معاملات فوريير c_n إلى الدالة $C(\xi)$، التي تسمى **تحويل فوريير** (Fourier transform) للدالة f، ويرمز لها بالرمز $\hat{f}(\xi)$، كما تتحول متسلسلة فوريير التي تمثل f على $(-\ell, \ell)$ إلى **تكامل فوريير** (Fourier integral)، المعطى بالصيغة (6.6)، والمتوقع أن يمثل f على الفترة $(-\infty,\infty)$ بكاملها.

إن الأسلوب الذي اتبعناه في الوصول إلى (6.5) و (6.6) بطبيعة الحال ليس "برهانا" لصحة هذا التمثيل، بل إن التكامل (6.5) قد لا يكون موجودا. إنما كان المقصود من هذه المقدمة إعطاء تبرير مقبول لتعريف تحويل فوريير بالصيغة (6.5)، وتقريب هذا المفهوم من ذهن القارئ كوسيلة لتمثيل الدالة غير الدورية على $\mathbb{R}$ بالتكامل (6.6)، مثلما كانت معاملات ومتسلسلات فوريير هي الوسيلة لتمثيل الدالة الدورية.

سنستخدم الرمز $\mathcal{L}^1(I)$ للدالة على مجموعة الدوال (الحقيقية أو المركبة) المعرفة على الفترة الحقيقية I والقابلة للتكامل على I، أي أن

$$f \in \mathcal{L}^1(a,b) \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx < \infty$$

فعلى سبيل المثال كل دالة متصلة على الفترة المحدودة I تنتمي إلى $\mathcal{L}^1(I)$ ، كما أن

$$x^\alpha \in \mathcal{L}^1(0,1) \Leftrightarrow \alpha > -1$$

$$x^\alpha \in \mathcal{L}^1(1,\infty) \Leftrightarrow \alpha < -1$$

تعريف (6.1)

لكل $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ نعرف **تحويل فورييه** للدالة f بأنه الدالة $\hat{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ المعرفة بالتكامل المعتل

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \qquad (6.7)$$

وسنلجأ أحيانا إلى استخدام الرمز $\mathcal{F}[f]$ بدلا عن $\hat{f}$.

بما أن $|e^{i\xi x}| = 1$ فمن الواضح أن

$$|\hat{f}(\xi)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty \qquad (6.8)$$

مما يدل على أن $\hat{f}$ دالة محدودة على $\mathbb{R}$. ومن جهة أخرى فمن المعادلة (6.7) لدينا

$$\mathcal{F}[c_1f_1 + c_2f_2] = c_1\mathcal{F}[f_1] + c_2\mathcal{F}[f_2] \quad \forall c_1,c_2 \in \mathbb{C}\ ,\ f_1,f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

وهذا يعني أن التحويل $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ المعرف على $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ تحويل خطي.

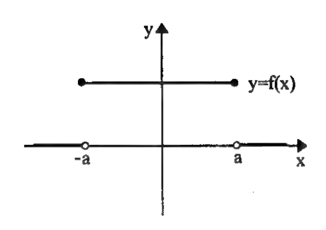
مثال (6.1)

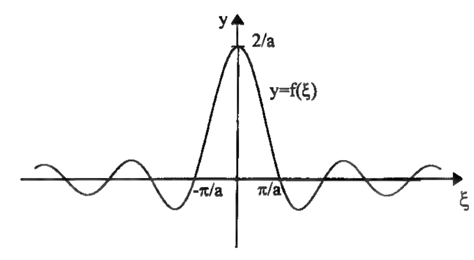
افرض أن

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & , \ |x| \le a \\ 0 & , \ |x| > a \end{cases}$$

إذن

$$\hat{f}_a(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x}dx = \frac{2}{\xi}\sin a\xi$$





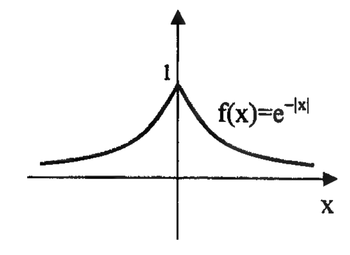
شكل (6.1)

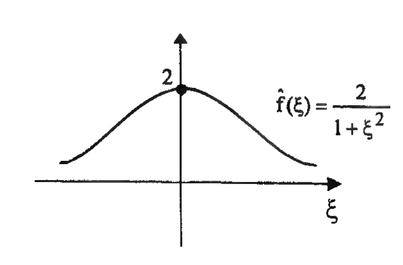
لاحظ أن النهاية $\lim_{a\to\infty} \hat{f}_a(\xi)$ لا توجد وأن الدالة $f(x) = 1$ لا تنتمي إلى $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

مثال (6.2)

في حالة $f(x) = e^{-|x|}$ نجد أن

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-i\xi x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-i\xi x}dx \\ &= \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \\ &= \frac{2}{1+\xi^2}\end{aligned}$$





شكل (6.2)

اعتمادا على أن الدالة f قابلة للتكامل على $\mathbb{R}$ بوسعنا إثبات أكثر من محدودية التحــويل $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$. على وجــه الخصوص يمكن إثبات أن $\hat{f}$ دالة متصلة. لكن ذلك سيعتمد على إحدى نظريات التكامل المتقدمة، والتي تعرف **بنظرية التقارب المسقوف** (dominated convergence theorem)، وفيما يلي نصها.

نظرية (6.1)

افرض أن (f_n) متتالية من الدوال القابلة للتكامل على الفترة I وأن $f_n \to f$ نقطيًّا على I. إذا كان هناك دالة موجبة $g \in \mathcal{L}^1(I)$ بحيث

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall\, x \in I,\, n \in \mathbb{N}$$

فإن $f \in \mathcal{L}^1(I)$، كما أن

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$$

يمكن الاطلاع على برهــان هــذه هــذه النظرية في [2] أو [12]، وقــد اكتسبت اسمها من كون الدالة g تشكل "سقفا" على المتتالية (f_n). لاحظ أن النظرية لا تشترط محدودية الفترة I.

لإثبات اتصال تحويل فوريير على $\mathbb{R}$ سنفرض أن ξ_0 أي نقطة في $\mathbb{R}$ وأن (ξ_n) متتالية متقاربة من ξ_0، ثم نستنتج أن $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(\xi_n) = \hat{f}(\xi_0)$. لاحظ أولا أن

$$|\hat{f}(\xi_n) - \hat{f}(\xi_0)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi_0 x}|\ |f(x)|dx \tag{6.9}$$

وبالنظر إلى أن

$$|e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi_0 x}|\ |f(x)| \leq 2|f(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

فإن النظرية (6.1) تقتضي

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi_0 x}|\ |f(x)|dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi_0 x}|\ |f(x)|dx$$
$$= 0$$

سنجد النتيجة التالية مفيدة للتعرف على سلوك الدالة $\hat{f}(\xi)$ عندما $|\xi| \to \infty$.

تمهيد (6.1)

افرض أن الدالة f ملساء قطعيا على $\mathbb{R}$.

(i) لأي فترة محدودة $[a,b]$ ، لدينا

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_a^b f(x)e^{i\xi x}dx = 0 \tag{6.10}$$

(ii) إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ فإن

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx = 0 \tag{6.11}$$

البرهان

افرض أن x_i ، حيث $1 \le i \le n$ ، هي نقاط عدم اتصال f و f' في الفترة (a,b) وأن $a = x_0$ ، $b = x_{n+1}$. إذن

$$\int_a^b f(x)e^{i\xi x}dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)e^{i\xi x}dx$$

ويكفي أن نثبت أن

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)e^{i\xi x}dx = 0 \quad \forall i$$

بإجراء التكامل بالتجزيء نجد أن

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)e^{i\xi x}dx = \frac{1}{i\xi} f(x)e^{i\xi x}\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{1}{i\xi}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)e^{i\xi x}dx$$

حيث يؤول الطرف الأيمن إلى 0 عندما $|\xi| \to \infty$.

(ii) من قابلية f للتكامل على $\mathbb{R}$، نعلم أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد ℓ بحيث

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx - \int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{i\xi x}dx\right| \leq \int_{|x|>\ell} |f(x)|x < \varepsilon/2 \quad \forall \xi$$

ومن المعادلة (6.10) يوجد $k > 0$ بحيث

$$\left|\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{i\xi x}dx\right| < \varepsilon/2 \quad \forall |\xi| > k$$

$$\Rightarrow \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx\right| < \varepsilon \quad \forall |\xi| > k$$ □

ملحوظة

من المتطابقة $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ والمعادلة (6.11) نرى أن

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\xi x dx = 0 \tag{6.12}$$

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\xi x dx = 0 \tag{6.13}$$

لكل دالة ملساء قطعيا في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. وهي نتيجة صحيحة لكل دالـة في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ حتـى وإن لم تكن ملساء قطعيًّا (انظر [8]).

بناء على ما تقدم نستطيع الآن أن نضع النظرية التالية.

نظرية (6.2)

لأي دالة $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$، فإن تحويل فورير

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

يمثل دالة متصلة ومحدودة على $\mathbb{R}$، وإذا كانت الدالة f ملساء قطعيا فإن

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0 \tag{6.14}$$

سبق أن ذكرنا في مستهل هذا الفصل أن الدالة $\hat{f}$ حلّت محل معاملات فوريير عندما انتقلنا من الدوال الدورية إلى الدوال غير الدورية، وما المعادلة (6.14) سوى الوجه الآخر لسلوك هذه المعاملات عندما $n \to \infty$. لكن النظرية (6.2)، وهي تحدد بعض خواص التحويل $\hat{f}$، لا تتطرق إلى الخاصة الأساسية المستمدّة من العلاقة (6.3)، ألا وهي إمكانية تمثيل الدالة f بالتكامل

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{6.15}$$

فكأن هذه الصيغة تمثل التحويل العكسي

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

الذي نستعيد به الدالة f، أي أن

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{6.16}$$

لكن التكامل (6.15)، المعروف **بتكامل فوريير** (Fourier integral) قد لا يكون موجودا، إذا لم تتلاش الدالة $\hat{f}$ عندما $|\xi| \to \infty$ بالسرعة الكافية، وإن وجد فقد لا تتحقق المساواة (6.16) نقطيا على $\mathbb{R}$. هذا ما سنبحثه في البند القادم.

تمارين (6.1)

(1) (i) إذا كانت الفترة I محدودة فأثبت أن

$$.f\in \mathcal{L}^2(I) \Rightarrow f\in \mathcal{L}^1(I)$$

(ii) إذا كانت f دالة محدودة على I فأثبت أن

$$.f\in \mathcal{L}^1(I) \Rightarrow f\in \mathcal{L}^2(I)$$

(2) افرض أن $\varphi : J \times I \to \mathbb{C}$ حيث I و J فترتان في $\mathbb{R}$ وأن $\varphi(\cdot,x)$ دالة متصلة على J لكل $x\in I$. إذا كان $|\varphi(\xi,x)| \le g(x)$ لكل $x\in J$، حيث $g \in \mathcal{L}^1(I)$ ،

فاستخدم نظرية التقارب المسقوف (6.1) لإثبات أن الدالة $F(\xi)=\int_I \varphi(\xi,x)dx$ متصلة على J.

(3) إذا كانت الدالة $\varphi(\cdot,x)$ في التمرين (2) متصلة قطعيًّا على J فأثبت أن الدالة F أيضا متصلة قطعيًّا على J.

(4) إذا كانت الدالة $\varphi_\xi(\cdot,x)$ في التمرين (2) متصلة على J فأثبت أن F قابلة للاشتقاق وأن $F'(\xi) = \int_I \varphi_\xi(\xi,x)dx$ متصلة على J.

(5) واضح أن

$$\int_0^\infty e^{-\xi x}dx = \frac{1}{\xi} \quad \forall \xi > 0$$

أثبت أن لأي عدد موجب a فإن

$$\int_0^\infty x^n e^{-\xi x}dx = \frac{n!}{\xi^{n+1}} \quad \forall \xi \geq a \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

وعندما $\xi = 1$ نحصل على التمثيل التالي لمضروب العدد n

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \Gamma(n+1)$$

(6) إذا كان a أي عدد موجب فاستخدام النظرية (6.1) لاستنتاج أن التكامل المعتل

$$\Gamma(\xi) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\xi-1}dx$$

دالة متصلة على $[a,\infty)$ وأن جميع مشتقاتها

$$\Gamma^{(n)}(\xi) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{d^n}{d\xi^n}(x^{\xi-1})dx$$

متصلة على $[a,\infty)$. استنتج من ذلك أن Γ دالة تحليلية على $(0,\infty)$.

(7) استخدم التمهيد (6.1) وخواص نواة ديريشليه (راجع البند (3.2)) لتقويم النهايات التالية

$$\text{(i)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_n(\xi)d\xi$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi/2} D_n(\xi)d\xi$$

$$\text{(iii)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} D_n(\xi)d\xi$$

$$\text{(iv)}\quad \lim_{n\to\infty}\int_{\pi/2}^{\pi} D_n(\xi)d\xi$$

(8) افرض أن كلا من الدالتين f و g ملساء قطعيا على (a,b) وأن نقاط عدم اتصال الدالتين ومشتقتيهما هي $\{x_1,\dots,x_n\}$. أثبت صحة التعميم التالي لقانون التكامل بالتجزيء:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b^-)g(b^-) - f(a^+)g(a^+) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$
$$+\sum_{i=1}^n g(x_i^-)[f(x_i^+)-f(x_i^-)] + \sum_{i=1}^n f(x_i^-)[g(x_i^+)-g(x_i^-)]$$
$$+\sum_{i=1}^n [f(x_i^+)-f(x_i^-)][g(x_i^+)-g(x_i^-)]$$

(6.2) تكامل فوريير

ليس من العسير التحقق من وجود التكامل المعتل (راجع التمرين 1.3.10)

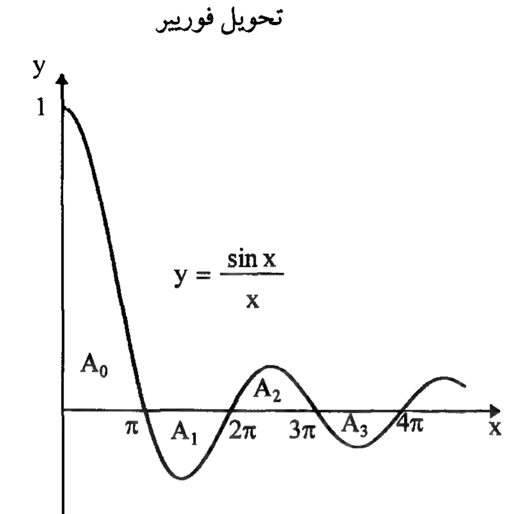
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

وذلك بملاحظة أن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ، وأن

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n A_n \qquad (6.17)$$

حيث

$$A_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx = (-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx > 0 \quad , \quad n = 0,1,2,\cdots$$



شكل (6.3)

بما أن

$$A_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|dx = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

$$A_{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi}|\sin x|dx = \frac{2}{(n+1)\pi} \leq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

فمن الواضح أن المتسلسلة (6.17) متقاربة (باختبار التناوب). لاحظ أن

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} A_k = \infty$$

لأن المتسلسلة ΣA_n متباعدة باختبار المقارنة مع $\frac{2}{\pi}\Sigma\frac{1}{n+1}$ ، وهذا يدل على أن الدالة $\frac{\sin x}{x}$ لا تنتمي إلى $\mathcal{L}^1(-\infty,\infty)$.

بقي أن نحسب $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ ، وسنعتمد على التمهيد (6.1) لتحقيق ذلك.

تمهيد (6.2)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} \tag{6.18}$$

البرهان

بالتعريف

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sin(x/2)} & 0<x<2\pi\\ 0 & x=0\end{cases}$$

يمكن التحقق من أن الدالة f و مشتقها متصلتان على الفترة $[0,\pi]$ وبذلك تنطبق شروط التمهيد (6.1) ويكون لدينا

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin(x/2)}\right]\sin\xi x\,dx=0$$

$$\Rightarrow\quad \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\xi\to\infty}\int_0^{\pi\xi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\lim_{\xi\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi x}{x}dx$$

$$=\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi x}{\sin(x/2)}dx \qquad (6.19)$$

بالرجوع إلى تعريف نواة ديريشليه في المعادلة (3.23)، نرى أن

$$D_n(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x}-e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

وبالتعويض عن ξ في (6.19) بالعدد $n+\frac{1}{2}$ ، والاستفادة من المعادلة (3.24)، نحصل على

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to\infty} \pi \int_0^\pi D_n(x)dx = \pi/2 \qquad \square$$

على الرغم من أن الدالة $\frac{\sin \xi x}{x}$ متصلة بالنسبة لكل من المتغـيرين x و ξ إلا أن الدالة

$$K(\xi) = \int_0^\infty \frac{\sin \xi x}{x}dx$$

ليست متصلة عند $\xi = 0$ لأن

$$K(\xi) = \begin{cases} \pi/2 \ , & \xi > 0 \\ 0 \ , & \xi = 0 \\ -\pi/2 \ , & \xi < 0 \end{cases}$$

مما يؤكد أن الدالة $\varphi(\xi,x) = \frac{\sin \xi x}{x}$ لا تحقق شروط التمرين 6.1.2، إذ أن الدالة $\left|\frac{\sin \xi x}{x}\right|$ غير قابلة للتكامل على الفترة $(0,\infty)$. ولا غرابة في هذا الوضع، فهو يناظر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n}$ من نهاية غير متصلة لأن التقارب غير منتظم.

وقياسا على ذلك يقال عن التكامل المعتل

$$F(\xi) = \int_c^\infty \varphi(\xi, x)dx$$

إنه **متقارب بانتظام** (uniformly convergent) على الفـــترة I إذا كان لكـل $\varepsilon > 0$ يوجد $N > c$ بحيث

$$\left|F(\xi) - \int_c^d \varphi(\xi,x)dx\right| = \left|\int_d^\infty \varphi(\xi,x)dx\right| < \varepsilon \quad \forall\, d > N, \quad \forall\, \xi \in I$$

حيث يتحدد العدد N بدلالة ε ولا يتأثر بالمتغير ξ.

يناظر اختبار فايرشتراس للمتسلسلات اختبارًا شـبيهًا نقدمه في التمهيـد التـالي ونترك برهانه كتمرين :

تمهيد (6.3)

افرض أن الدالة $\varphi : [a,b]\times[c,\infty)\to\mathbb{C}$ تحقق $|\varphi(\xi,x)|\le g(x)$ لكل $\xi\in[a,b]$. إذا كانت الدالة g قابلة للتكامل على $[c,\infty)$ فإن التكامل $\int_0^\infty \varphi(\xi,x)dx$ متقارب بانتظام على $[a,b]$.

إذا كانت الدالة $\varphi(\xi,x)$ تحقق شرط التمهيد (6.3) وكانت، بالإضافة إلى ذلك، متصلة على $a \le \xi \le b$ لكل x فمن الواضح (تمرين 6.1.2) أن الدالة

$$F(\xi) = \int_c^\infty \varphi(\xi,x)dx$$

أيضا متصلة على $[a,b]$ ، وهي تحقق

$$\int_a^b F(\xi)d\xi = \int_c^\infty \int_a^b \varphi(\xi,x)d\xi dx \qquad (6.20)$$

لأن التقارب المنتظم $\int_c^d \varphi(\xi,x)dx \to F(\xi)$ يعني أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N > 0$ بحيث

$$\begin{aligned} d \ge N \Rightarrow \left|F(\xi) - \int_c^d \varphi(\xi,x)dx\right| &\le \int_d^\infty g(x)dx < \varepsilon \\ \Rightarrow \left|\int_a^b F(\xi)d\xi - \int_c^d \int_a^b \varphi(\xi,x)d\xi dx\right| & \\ = \left|\int_a^b F(\xi)d\xi - \int_a^b \int_c^d \varphi(\xi,x)dx d\xi\right| & \\ \le \varepsilon(b-a) & \end{aligned}$$

يناظر النظرية (3.2) في سلاسل فورييه النظرية التالية، التي يمكن اعتبارها النظرية الأساسية لتكامل فورييه.

نظرية (6.3)

افرض أن f دالة ملساء قطعيا على $\mathbb{R}$ وأن $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. إذا كان

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\xi x}dx \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

فإن

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi=\frac{1}{2}[f(x^{+})+f(x^{-})]\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{6.21}$$

ملحوظات

(1) توصلنا فيما سبق إلى أن تحويل فورييه $\mathcal{F}[f]=\hat{f}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

(2) لاحظ أن النهاية

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

في (6.21) تمثل قيمة كوشى الرئيسية للتكامل المعتل

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

ومن المعلوم أن النهاية الأولى (المقيَّدة) قد توجد دون أن توجد الثانية (غير المقيَّدة).

(3) إذا كانت x نقطة اتصال للدالة f فإن المساواة (6.21) تصبح

$$f(x)=\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

ويمثل الطرف الأيمن **تحويل فورييه العكسي**، أو **تكامل فورييه**

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)=\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

(4) إذا كانت الدالة $\hat{f}$ قابلة للتكامل عل $\mathbb{R}$ فإن تحويل فورييه العكسي يتساوى مع التكامل المعتل

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

لكن هذا التكامل قد لا يكون متقاربا بانتظام، بدليل أن الدالة f ليست بالضرورة متصلة.

(5) إذا كان $\hat{f}=0$ فإن (6.21) تقتضي أن تكون $f=0$ حيثما كانت $f(x)=\frac{1}{2}[f(x^{+})+f(x^{-})]$ ، مما يعني أن $\mathcal{F}$ تحويل متباين على الدوال الملساء قطعيا في $\mathcal{L}^{1}(\mathbb{R})$ التي تحقق هذه العلاقة (ومن ضمنها الدوال المتصلة).

برهان النظرية

$$\int_{-\ell}^{\ell}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi=\int_{-\ell}^{\ell}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\sigma)e^{-i\xi\sigma}d\sigma\right]e^{ix\xi}d\xi$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell}f(\sigma)e^{i\xi(x-\sigma)}d\xi d\sigma$$

حيث استندنا إلى المعادلة (6.20) لتبديل ترتيب التكامل بالنسبة للمتغيرين σ و ξ.

$$\int_{-\ell}^{\ell}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\ell(x-\sigma)}{x-\sigma}f(\sigma)d\sigma$$
$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\ell\eta}{\eta}f(x+\eta)d\eta$$

حيث $\eta=\sigma-x$.

افرض الآن ان δ أي عدد موجب. بما أن الدالة $\frac{1}{\eta}f(x+\eta)$ ملساء قطعيا وقابلة للتكامل على $|\eta|\geq\delta$، فإن

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_{|\eta|\geq\delta}\frac{\sin\ell\eta}{\eta}f(x+\eta)d\eta=0$$

بالنظر إلى (6.13). وعليه فإن

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_{-\ell}^{\ell}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi=2\lim_{\ell\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin\ell\eta}{\eta}f(x+\eta)d\eta$$
$$=2\lim_{\ell\to\infty}\int_{0}^{\delta}\frac{\sin\ell\eta}{\eta}[f(x+\eta)+f(x-\eta)]d\eta$$

ولكن

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_{0}^{\delta}\frac{\sin\ell\eta}{\eta}f(x+\eta)d\eta=\lim_{\ell\to\infty}\left[\int_{0}^{\delta}\sin\ell\eta\frac{f(x+\eta)-f(x^{+})}{\eta}d\eta\right.$$
$$\left.+f(x^{+})\int_{0}^{\delta}\frac{\sin\ell\eta}{\eta}d\eta\right]$$

وبتطبيق التمهيد (6.1) (الفقرة (i)) نرى أن

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_0^{\delta}\sin\ell\,\eta\,\frac{f(x+\eta)-f(x^+)}{\eta}d\eta=0$$

كما أن التمهيد (6.2) يعطي

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin\ell\eta}{\eta}d\eta=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

فنحصل بذلك على

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin\ell\eta}{\eta}f(x+\eta)d\eta=\frac{\pi}{2}f(x^+)$$

وبالمثل ، فإن

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin\ell\eta}{\eta}f(x-\eta)d\eta=\frac{\pi}{2}f(x^-)$$

أي أن

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_{-\ell}^{\ell}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi=\pi[(f(x^+)+f(x^-)]$$

وبقسمة الطرفين على 2π نحصل على المساواة (6.21). □

بالرجوع إلى المثال (6.1) نجد أن

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{2}{\xi}\sin a\xi\,e^{-i\xi x}d\xi=\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{1}{\xi}\sin a\xi\cos\xi x\,d\xi$$

حيث استفدنا من أن $\frac{1}{\xi}\sin a\xi$ دالة زوجية وأن $\cos\xi x$ هي الجزء الزوجي من $e^{-i\xi x}$. فنستنتج ، بنا على النظرية (6.3)، أن

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{1}{\xi}\sin a\xi\cos\xi x\,d\xi=\begin{cases}0, & x<-a\\ 1/2, & x=-a\\ 1, & -a<x<a\\ 1/2, & x=a\\ 0, & x>a\end{cases}$$

وكما أن لسلاسل فورير صيغة أسية وأخرى مثلثية، فكذلك الحالة بالنسبة لتكامل فورير، وهي تعتمد أساسا على العلاقة $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. لنفرض أن $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ دالة حقيقية، ملساء قطعيا، وتحقق

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

مثل هذه الدالة لها تحويل فورير

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\xi x dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\xi x dx \\ &= A(\xi) - iB(\xi) \end{aligned} \tag{6.22}$$

حيث

$$A(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\xi x\, dx \tag{6.23}$$

$$B(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\xi x\, dx \tag{6.24}$$

ومن نظرية (6.3) نرى أن

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}[A(\xi) - iB(\xi)]e^{ix\xi}d\xi \\ &= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}[A(\xi)\cos x\xi + B(\xi)\sin x\xi]d\xi \end{aligned} \tag{6.25}$$

حيث استفدنا من أن $A(\xi)$ دالة زوجية بينما $B(\xi)$ دالة فردية. وعندما تكون الدالة f زوجية فإن $B(\xi) = 0$ وتتحول (6.23) و(6.25) إلى

$$A(\xi) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\xi x\, dx \tag{6.26}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} A(\xi)\cos x\xi d\xi \tag{6.27}$$

أما إذا كانت f فردية فإن $A(\xi) = 0$ بينما

$$B(\xi) = 2\int_0^\infty f(x)\sin\xi x dx \tag{6.28}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(\xi)\sin x\xi d\xi \tag{6.29}$$

وفي الحالتين تتحول النهاية (6.25) إلى تكامل معتل.

مثال (6.3)

الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad |x| \le \pi \\ 0 & , \quad |x| > \pi \end{cases}$$

فردية. إذن

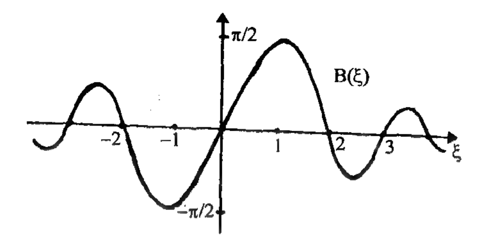
$$\begin{aligned} A(\xi) &= 0 \\ B(\xi) &= 2\int_0^\infty f(x)\sin\xi x dx \\ &= 2\int_0^\pi \sin x \sin\xi x dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\xi}\sin(1-\xi)\pi - \frac{1}{1+\xi}\sin(1+\xi)\pi\right] \\ &= \frac{\sin\pi\xi}{1-\xi^2} \end{aligned}$$

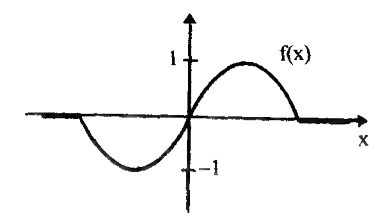
كما أن

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\pi\xi}{1-\xi^2}\sin x\xi d\xi$$

لاحظ هنا أن الدالة $\frac{1}{1-\xi^2}\sin\pi\xi\sin x\xi$ لها نهاية عند $\xi = \pm\pi$، فهي إذن

متصلة وقابلة للتكامل على $\mathbb{R}$.





شكل (6.4)

مثال (6.4)

وجدنا في المثال (6.2) أن تحويل فوريير للدالة الزوجية $e^{-|x|}$ هو

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$$

فنستنتج من (6.27) أن

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos x\xi}{1+\xi^2}d\xi$$

وعندما $x = 0$ نحصل على التكامل المعروف

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{2}$$

سنختتم هذا البند بالحديث عن تحويل فوريير في الفضاء $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ، وهو الفضاء الذي بدأنا به دراسة هذا التحويل في مستهل البند (6.1). نستشف من التمرينين 6.1.1 و6.1.2 أنه لا يوجد علاقة احتواء بين $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ و $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ بصفة عامة، ولكن الدوال المحدودة في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ تنتمي إلى $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ لأن تقارب $|f(x)|^2$ من 0 عندما $|x| \to \infty$ أسرع من تقارب $|f(x)|$ من 0، على افتراض أن f دالة متصلة قطعيا في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. لنفرض أن كلا من f و g دالة ملساء في $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ وأن $\hat{f}$ و $\hat{g}$ قابلتان للتكامل على $\mathbb{R}$. من نظرية (6.2) نعلم أن $\hat{f}$ و $\hat{g}$ دالتان متصلتان ومحدودتان على $\mathbb{R}$. وبالمثل فإن التكاملين

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \quad , \int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}dx$$

يمثلان دالتين متصلتين ومحدودتين على $\mathbb{R}$، هما $2\pi f(x)$ و $2\pi g(x)$ بالترتيب.

نستنتج من ذلك أن الدوال f، g، $\hat{f}$، $\hat{g}$ جميعها تقع في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$، وأن

$$\begin{aligned} 2\pi\langle f,g\rangle &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}}d\xi dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,dxd\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \\ &= \langle\hat{f},\hat{g}\rangle \end{aligned} \tag{6.30}$$

وعندما تكون $f = g$ فإننا نحصل على العلاقة

$$||\hat{f}||^2 = 2\pi||f||^2 \tag{6.31}$$

التي تناظر **متطابقة بارسيفال** (1.12)، وتشكل مع المعادلة (6.30) ما يسمى **بنظرية بلانشيريل** (Plancherel theorem). وحقيقة الأمر أن (6.30) و (6.31) تظل صحيحة لأي $f,g\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ لكن برهان ذلك يعتمد على إثبات أن $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ كثيفة في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$، بمعنى أن كل $f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ هي نهاية، في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$، لمتتالية من الدوال في $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\cap\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (انظر [8]).

تمارين (6.2)

أوجد تكامل فورير لكل من الدوال المعطاة في التمارين (1) إلى (5):

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x| & , \quad |x|<\pi \\ 0 & , \quad |x|>\pi \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x<1\\ 0 & , \quad x<0\ ,\ x>1\end{cases} \tag{2}$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & , \quad 0<x<\pi\\ 0 & , \quad x<0\ ,\ x>\pi\end{cases} \tag{3}$$

$$f(x)=xe^{-|x|} \quad , \quad x\in\mathbb{R} \tag{4}$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & , \quad 0<x<\pi/2\\ -\cos x & , \quad -\pi/2<x<0\end{cases} \tag{5}$$

(6) استنتج من التمرين (3)أن

$$\int_0^\infty \frac{\xi\sin\pi\xi}{1-\xi^2}d\xi=\frac{\pi}{2}$$

(7) أثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{\xi^3\sin x\xi}{\xi^4+4}d\xi=\frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x \quad \forall x>0$$

هل هذا التكامل متقارب بانتظام على $(0,\infty)$؟

(8) أثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{\xi\cos x\xi}{1+\xi^2}d\xi=\frac{\pi}{2}e^{-x} \quad \forall x>0$$

هل هذا الكامل متقارب بانتظام على $(0,\infty)$؟

(9) أثبت أن

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi\xi}{\xi}\sin x\xi d\xi=\begin{cases}\pi/2 & , \quad 0<x<\pi\\ 0 & , \quad x>\pi\end{cases}$$

(10) أثبت أن

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](\xi)=\frac{2}{1+\xi^2}$$

ثم استخدم ذلك لإيجاد $\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](\xi)$.

(11) على اقتراض أن

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & , \quad |x| \le 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

أثبت أن

$$\hat{f}(\xi) = \left[\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right]^2$$

ثم استنتج أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi = \pi$$

(12) تحقق من صحة العلاقة

$$\|\hat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2$$

عندما تكون $f(x) = e^{-|x|}$.

(13) عبر عن العلاقة (6.31) بدلالة التحويلين A و B المعرفين في (6.23) و(6.24).

(6.3) خواص تحويل فورييه وتطبيقاته

تنص النظرية التالية على خواص الاشتقاق الأساسية التي تميِّز تحويل فوريير وتجعله أداة لا غنى عنها في التعامل مع المعادلات التفاضلية الخطية.

نظرية (6.4)

افرض أن $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$

(i) إذا كان $x\,f(x) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ فإن الدالة $\hat{f}$ قابلة للاشتقاق، ومشتقتها

$$\hat{f}'(\xi) = -i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-i\xi x} dx = \mathcal{F}[-ixf(x)](\xi) \qquad (6.32)$$

دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

(ii) إذا كانت $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ وكانت f متصلة على $\mathbb{R}$ فإن

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = i\xi\hat{f}(\xi) \qquad (6.33)$$

البرهان

(i)
$$\frac{\hat{f}(\xi+\Delta\xi)-\hat{f}(\xi)}{\Delta\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-i(\xi+\Delta\xi)x} - e^{i\xi x}}{\Delta\xi}dx$$

بأخذ النهاية عندما $\Delta\xi \to 0$ واستخدام النظرية (6.1) فإننا نحصل على المساواة (6.32).

(ii) من قابلية f' للتكامل فإن التحويل $\mathcal{F}[f']$ موجود ويساوي

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x}dx$$

كما أن النهايتين

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x\to\pm\infty} \int_0^x f'(t)dt$$

موجودتان. ومن قابلية الدالة f للتكامل لابد أن تكون $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. وباستخدام التكامل بالتجزيء نحصل على المساواة (6.33). □

ليس من العسير تعميم هذه النظرية للحصول على

نتيجة (6.4.1)

افرض أن $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ وأن n أي عدد طبيعي.

(i) إذا كان $x^n f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ فإن

$$\hat{f}^{(n)}(\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)](\xi) \qquad (6.34)$$

دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

(ii) إذا كانت $f^{(k)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ لكل $1 \le k \le n$ ، وكانت $f^{(n-1)}$ متصلة على $\mathbb{R}$ فإن

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi) \qquad (6.35)$$

ملحوظة

من المعادلة (6.34) نرى أنه كلما تناقصت $|f(x)|$ بمعدل أكبر (مع الزيادة في $|x|$) كلما ازدادت قابلية $\hat{f}$ للاشتقاق، بينما تدل المعادلة (6.35) على أنه كلما ازدادت رتبة المشتقة للدالة f القابلة للتكامل كلما تناقصت $|\hat{f}(\xi)|$ بمعدل أكبر.

مثال (6.5)

افرض أن $f(x) = e^{-x^2}$. لإيجاد $\hat{f}(\xi)$ نلاحظ أولا أن

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} rdr = \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad (6.36)$$

وبما أن الدالة f تستوفي شروط النظرية (6.4) فإننا نحصل من المعادلة (6.32) على

$$\begin{aligned}\hat{f}'(\xi) &= -i\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}(e^{-x^2}) e^{-i\xi x} dx \\ &= -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(-i\xi) e^{-i\xi x} dx \\ &= -\frac{\xi}{2}\hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

وبالقسمة على $\hat{f}(\xi)$ ومكاملة طرفي هذه المعادلة نحصل على

$$\hat{f}(\xi) = ce^{-\xi^2/4}$$

وبالتعويض عند $\xi = 0$ والاستفادة من (6.36) نرى ان

$$c = \hat{f}(0) = \sqrt{\pi}$$

فنستنتج أن

$$\mathcal{F}[e^{-x^2}] = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}$$

مثال (6.6)

أوجد حل المسألة الحدية

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \quad -\infty < x < \infty , t > 0 \tag{6.37}$$

$$u(x,0) = f(x) \quad -\infty < x < \infty \tag{6.38}$$

حيث k ثابت موجب.

الحل

على افتراض أن $u(x,t) = v(x)w(t)$ ، وبعد التعويض في المعادلة (6.37) نجد أن

$$\frac{1}{k}\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} , t > 0$$

فنستنتج أن طرفي هذه المعادلة ثابت ، فليكن $-\xi^2$. عندئذ نحصل على المعادلتين

$$v''(x) + \xi^2 v(x) = 0 \tag{6.39}$$

$$w'(t) + k\xi^2 w(t) = 0 \tag{6.40}$$

وحلهما ، على الترتيب ،

$$v(x) = A(\xi)\cos\xi x + B(\xi)\sin\xi x$$
$$w(t) = e^{-k\xi^2 t}$$

ويترتب على ذلك أن الدالة

$$u(x,t,\xi) = [A(\xi)\cos\xi x + B(\xi)\sin\xi x]e^{-k\xi^2 t} \tag{6.41}$$

تحقق المعادلة التفاضلية (6.37) لكل $\xi \in \mathbb{R}$ ، حيث $A(\xi)$ و $B(\xi)$ دالتان اختياريتان في ξ. لكي نحقق الشرط الابتدائي (6.38) ينبغي أن نختار $A(\xi)$ و $B(\xi)$ بحيث نحصل على تمثيل مناسب للدالة $f(x)$ بواسطة مجموعة الحلول

$$u(x,0,\xi) = A(\xi)\cos\xi x + B(\xi)\sin\xi x,\ \xi \in \mathbb{R}$$

وهذا يتحقق بوضع الحل العام للمسألة الحدية على الصورة

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(\xi)\cos\xi x+B(\xi)\sin\xi x]e^{-k\xi^2 t}d\xi \tag{6.42}$$

التي تحقق المعادلة (6.37)، وبالتعويض عند $t = 0$ تعطي

$$u(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(\xi)\cos\xi x+B(\xi)\sin\xi x]d\xi$$

فتتحقق المعادلة (6.38) باختيار

$$A(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cos\xi y dy \tag{6.43}$$

$$B(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\sin\xi y dy \tag{6.44}$$

وهذا يستوجب، بطبيعة الحال، أن تكون الدالة f قابلة للمكاملة على $\mathbb{R}$. بالتعويض في (6.42) نرى الآن أن حل المسألة الحدية هو

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cos(x-y)\xi\, e^{-k\xi^2 t}dyd\xi \tag{6.45}$$

تسمى المعادلة (6.37) **معادلة الحرارة** (راجع التمرين 5.5.13)، وهي تعبِّر عن العلاقة بين مشتقات درجة الحرارة $u(x,t)$ على القضيب $-\infty < x < \infty$ عند اللحظة t بالنسبة للموقع x والزمن t. كما تعبر المعادلة (6.38) عن توزيع درجة الحرارة على القضيب عند اللحظة $t = 0$. أما الثابت الموجب k فهو يتحدد بمعرفة خاصة توصيل الحرارة لمادة القضيب.

بإمكاننا أيضا الحصول على الصيغة (6.45) لحل معادلة الحرارة باستخدام تحويل فورير والنتيجة (6.4.1). إذا اعتبرنا $u(x,t)$ دالة تحقق شروط النتيجة (6.4.1)، أي أن u_{xx} قابلة للتكامل على $\mathbb{R}$ بالنسبة للمتغير x، فإن المعادلة (6.37) تتحول، بتأثير $\mathcal{F}$، إلى

$$\hat{u}_t(\xi,t)=k(i\xi)^2\hat{u}(x,t)=-k\xi^2\hat{u}(x,t)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi,t)=ce^{-k\xi^2 t}$$

ومن الشرط (6.38) نحصل على $c=\hat{f}(\xi)$، أي أن

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t}e^{i\xi x}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}dy\right]e^{-k\xi^2 t}\ e^{i\xi x}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i(x-y)\xi}e^{-k\xi^2 t}d\xi dy$$

على افتراض أنه يجوز تبديل ترتيب التكامل بالنسبة للمتغيرين ξ و y. بما أن الدالة $e^{-k\xi^2 t}$ زوجية في ξ فإن

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(y)\cos(x-y)\xi\ e^{-k\xi^2 t}d\xi dy \qquad (6.46)$$

بما يتفق مع النتيجة السابقة.

تمارين (6.3)

(1) أثبت صحة العلاقتين

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{F}[e^{iax}f(x)](\xi) = \hat{f}(\xi-a)$$

(2) تعرَّف **دالة هرميت** ذات الرتبة n بأنها

$$\Psi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

حيث H_n كثيرة حدود هرميت ذات الرتبة n. أثبت أن

$$\hat{\Psi}_n(\xi) = i^n\sqrt{2\pi}\,\Psi_n(\xi)$$

(3) أوجد حل معادلة الحرارة

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 < x < \infty, t > 0$$

بالشروط الحدية

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 < x < \infty$$

حيث $f \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$.

(4) أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\int_0^\infty f(x)\cos\xi x dx = \begin{cases} 1 & , \quad 0<\xi<\pi \\ 0 & , \quad \pi<\xi<\infty \end{cases}$$

(5) أثبت أن

$$\int_0^\infty e^{-k\xi^2 t}\cos(x-y)\xi d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kt}} e^{-(x-y)^2/4kt}$$

(6) (i) استخدم نتيجة التمرين (5) في المعادلة (6.45) للحصول على

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x+2\sqrt{2kt}\,p)e^{-p^2}dp$$

(ii) افرض أن $f(x) = T_0$ على الفترة $(-a,a)$، حيث T_0 ثابت، وأن $f(x) = 0$ خارج الفترة $[-a,a]$. استخدم تعريف دالة الخطأ في التمرين 5.1.7 للحصول على التمثيل

$$u(x,t) = \frac{T_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{kt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{kt}}\right)\right]$$

(iii) ابحث سلوك في الدالة $u(x,t)$ عندما $|x| \to \infty$ وعندما $t \to \infty$، ثم قدم تفسيرًا فيزيائيًا لذلك السلوك.

الفصل السابع

تحويل لابلاس

(7.1) تحويل لابلاس

لو استبدلنا المتغير $i\xi$ في تحويل فورير

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = \mathcal{F}[f](\xi)$$

بالمتغير المركب $s = \sigma + i\xi$ وقصرنا مجال تعريف الدالة f على $[0,\infty)$ لنتج عن ذلك الدالة

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx \qquad (7.1)$$

ويسمى التحويل الخطي من f إلى F **تحويل لابلاس** (Laplace transformation)، كما يطلق تحويل لابلاس (تجاوزًا) على الدالة F نفسها، ويكتب

$$F = \mathcal{L}[f]$$

من الصيغة (7.1) نرى أن التكامل المعتل الذي يمثل $F(s)$ موجود لقطاع أوسع من الدوال القابلة للتكامل على $[0,\infty)$ إذا اعتبرنا $\text{Re}\, s = \sigma > 0$. فعلى سبيل المثال

$$\mathcal{L}[1] = \int_{0}^{\infty} e^{-sx}dx = \frac{1}{s} \quad \forall s \in \mathbb{C} \;, \;\; \text{Re}\, s > 0$$

مع أن الدالة $f(x) = 1$ ليست في $\mathcal{L}^1(0,\infty)$. وفي ذلك ميزة كبيرة على تحويل فوريير. في هذه المعالجة سنكتفي باعتبار s متغيرا حقيقيا، إلا إذا كان هناك إشارة صريحة بخلاف ذلك، وذلك بهدف التبسيط واختصار الرموز.

سنبدأ بنظرية وجود لتحويل لابلاس.

نظرية (7.1)

لتكن f دالة متصلة قطعيا على $[0,\infty)$. إذا وجد ثابت حقيقي α بحيث تكون الدالة $e^{-\alpha x} f(x)$ محدودة على $[0,\infty)$ فإن تحويل لابلاس للدالة f

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

موجود لكل $s > \alpha$.

البرهان

افرض أن هناك ثابتًا موجبًا M بحيث

$$|e^{-\alpha x} f(x)| \leq M \quad \forall x \geq 0$$

إذن

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f]| &= \left| \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)x} |e^{-\alpha x} f(x)| dx \\ &\leq \frac{M}{s-\alpha} \end{aligned}$$

□

مثال (7.1)

(i) حيث أن الدالة $|e^{-\alpha x} x|$ محدودة لأي عدد موجب α فإن

$$\mathcal{L}[x] = \int_0^\infty x e^{-sx} dx = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{1}{s^2} \quad \forall s > \alpha$$

وبما أن $\alpha > 0$ اختياري فإن

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{s^2} \quad \forall s > 0$$

(ii) لكل $n \in \mathbb{N}$، لدينا

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^n] &= \frac{n}{s}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}dx \quad \forall s > 0 \\ &= \cdots \\ &= \frac{n!}{s^n}\int_0^\infty e^{-sx}dx \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

(iii) لكل $\alpha > -1$

$$\mathcal{L}[x^\alpha] = \int_0^\infty e^{-sx}x^\alpha dx$$

وبالتعويض $t = sx$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x^\alpha] &= \int_0^\infty e^{-t}(\frac{t}{s})^\alpha \frac{dt}{s} \\ &= \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha dt \\ &= \frac{1}{s^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{ax}] &= \int_0^\infty e^{-(s-a)x}dx \\ &= \frac{1}{s-a} \quad , \quad s > a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{L}[\sinh ax] &= \mathcal{L}[\frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax}] \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}) \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2} \quad , \quad s > |a|\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[e^{iax}] = \int_0^\infty e^{-(s-ia)x}dx \qquad (v)$$

$$= \frac{1}{s-ia} \quad , \quad s>0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\sin ax] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right)$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2} \quad , \quad s>0$$

هناك نتيجة مناظرة للنظرية (6.4) تنص على أنه إذا كـانت f ملساء قطعيا على $[0,\infty)$ بحيث تكون الدالة $e^{-\alpha x} f(x)$ محدودة على $[0,\infty)$ فإن تحويل لابلاس

$$\mathcal{L}[f](s) = F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

يمثل دالة تحليليـــة في المتغـير المركب s على نصف المستوى $\text{Re } s > \alpha$، وعندئذ يمثل التكامل المركب

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\xi\to\infty}\int_{\alpha_0-i\xi}^{\alpha_0+i\xi} e^{sx}F(s)ds = \mathcal{L}^{-1}[F](x) \qquad (7.2)$$

حيث $\alpha_0 > \alpha$، تحويل لابلاس العكسي الذي به نستعيد الدالة f. أي أن

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = f$$

حيثما كانت f متصلة في $(0,\infty)$ وعند نقاط عدم الاتصال فإن

$$\mathcal{L}^{-1}[F](x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] \qquad (7.3)$$

أما عند $x = 0$ فإن

$$\mathcal{L}^{-1}[F](0) = \frac{1}{2}f(0^+) \qquad (7.4)$$

كما أن

$$\mathcal{L}^{-1}[F](x) = 0 \qquad \forall\, x<0 \qquad (7.5)$$

لن نثبت هذه النظرية ولن نحتاج إلى استخدامها لإيجاد f(x) عندما تكون F(s) معلومة، وإنما سنعتمد على جداول تحويلات لابلاس في ذلك. لكن تدل النظرية على أن تحويل لابلاس

$$f \overset{\mathscr{L}}{\mapsto} F$$

متباين، بمعنى أن

$$F_1 = F_2 \Rightarrow \mathscr{L}^{-1}[F_1] = \mathscr{L}^{-1}[F_2]$$

أي أن الدوال المختلفة لها تحويلات مختلفة، على افتراض أن هذه الدوال تتمتع بخواص الملوسة المنصوص عليها آنفا. وبناء على ذلك نستطيع أن نكتب

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

حيث نعتبر الطرف الأيمن مساويا للعدد 1 عندما $n = 1$، كما أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2 - a^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})$$

$$= \sinh ax$$

تمارين (7.1)

أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال في التمارين (1) إلى (8):

$$f(x) = (a+bx)^2 \qquad (1)$$

$$f(x) = \sin^2 x \qquad (2)$$

$$f(x) = \sin x \cos x \qquad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} c & 0 < x < a \\ 0 & a < x < \infty \end{cases} \qquad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} a - \frac{a}{b}x & , \quad 0 < x < b \\ 0 & , \quad x > b \end{cases} \qquad (5)$$

$$f(x) = x \cos x \qquad (6)$$

$$f(x) = x^2 e^x \qquad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad x > 0 \qquad (8)$$

ملحوظة: يدل التمرين الأخير على أن محدودية الدالة $e^{-\alpha x}f(x)$ على $(0,\infty)$ ليس ضرورية لوجود $\mathcal{L}[F]$.

أوجد $\mathcal{L}^{-1}[F]$ لكل من الدوال في التمارين من (9) إلى (15):

$$F(s) = \frac{a}{s+b} \qquad (9)$$

$$F(s) = \frac{2s-5}{s^2-9} \qquad (10)$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} \qquad (11)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+2s} \qquad (12)$$

$$F(s) = \frac{3(s-1)}{s^2-6} \qquad (13)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^{3/2}} \qquad (14)$$

$$F(s) = \frac{14s^2 + 55s + 51}{2s^3 + 12s^2 + 22s + 12} \qquad (15)$$

(7.2) خواص الاشتقاق والانسحاب

نقدم في النظرية التالية تأثر تحويل لابلاس بالاشتقاق والتكامل.

نظرية (7.2)

(i) افرض أن الدالة f متصلـة وأن $e^{-\alpha x}f(x)$ محـدودة علـى $[0,\infty)$ لثابت مـا α. إذا كانت المشتقة f' متصلة قطعيا فإن

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0) \quad , \quad s > \alpha \qquad (7.6)$$

(ii) إذا كانت الدالة f متصلة قطعيا والدالة $e^{-\alpha x}f(x)$ محدودة على $[0,\infty)$ فإن

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(x)] \quad , \quad x > 0 \ , \ s > \alpha \qquad (7.7)$$

البرهان

(i) واضح من المعطيات أن شروط وجـــود $\mathcal{L}[f']$ محققـة. باستخدام التكـامل بالتجزيء نجد أن

$$\mathcal{L}[f'] = \int_0^\infty e^{-sx}f'(x)dx \quad , \quad s > \alpha$$

$$= e^{-sx}f(x)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

$$= s\mathcal{L}[f] - f(0)$$

(ii) افرض أن

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

من محدودية الدالة $e^{-\alpha x}f(x)$ يوجد ثابت موجب M بحيث

$$|e^{-\alpha x}f(x)|\le M \quad \forall x\ge 0$$

$$\Rightarrow |g(x)|\le M\int_0^x e^{\alpha t}dt\le \frac{M}{\alpha}[e^{\alpha x}-1] \quad \forall x>0\,,\alpha\neq 0$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha x}|g(x)|\le M/|\alpha|$$

مما يعـــني أن $e^{-\alpha x}g(x)$ أيضا دالة محدودة على $[0,\infty)$. وبما أن g متصلة ومشتقـــتها $g'=f$ متصلة قطعيا على $[0,\infty)$ فمن الفقرة (i) نستنتج أن

$$\mathscr{L}[f(x)]=\mathscr{L}[g'(x)]=s\,\mathscr{L}[g(x)-g(0)]$$

وبما أن $g(0)=0$ فإننا نحصل على (7.7) لكل $\alpha\neq 0$. وبوسع القارىء أن يتحقق من صحة القاعدة في الحالة الخاصة $\alpha=0$. □

بالاستقراء على n نستطيع أن نعمـم الصيغـة (7.6) للحصـول علـى تحويـل المشتقات العليا للدالة f، وسنترك تفاصيل البرهان للقارئ.

نتيجة (7.2.1)

افرض أن f ومشتقـــاتها f' ، ... ، $f^{(n-1)}$ دوال متصلة على $[0,\infty)$ وأن $e^{-\alpha x}f^{(k)}(x)$ دالة محدودة على $[0,\infty)$ لثابت ما α ولكل $0\le k\le n-1$. إذا كانت المشتقة $f^{(n)}$ متصلة قطعيا على $[0,\infty)$ فإن تحويل لابلاس للدالة $f^{(n)}$ موجود ويساوي

$$\mathscr{L}[f^{(n)}]=s^n\mathscr{L}[f]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \tag{7.8}$$

ملحوظة: يقصد بالمشتقة $f^{(k)}(0)$ في حقيقة الأمر $f^{(k)}(0^+)$.

مثال (7.2)

(i) باستخدام نتيجة المثال (7.1) الفقرة (v) نرى أن

$$\mathcal{L}[\cos ax] = \mathcal{L}[\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\sin ax]$$
$$= \frac{s}{a}\frac{a}{s^2+a^s} - \sin 0$$
$$= \frac{s}{s^2+a^2} \quad , \quad s>0$$

(ii) افرض أن $\mathcal{L}[f] = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2-1}$ حيث $s > 1$. لايجاد الدالة f نلاحظ من المثال (7.1) الفقرة (iv) أن $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2-1}] = \sinh x$ ، وبتطبيق القاعدة (7.7) نحصل على

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{s^2-1}\right] = \int_0^x \sinh t\, dt = \cosh x - 1$$

تدل النظرية (7.2) على أن عملية الاشتقاق على الدالة f تتحول بتأثير $\mathcal{L}$ إلى الضرب في s (مع طرح العدد (f(0)) وتتحول عملية التكامل على f إلى قسمة على s. وسنرى الان أن العكس صحيح أيضا، مع بعض الاختلاف، إذ أن

$$\mathcal{L}[xf] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f] = -F'(s) \tag{7.9}$$

$$\mathcal{L}[f/x] = \int_s^\infty F(t)dt \tag{7.10}$$

حيث يفترض، بطبيعة الحال، في المعادلة (7.10) أن النهاية $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ موجودة.

سنترك برهان هاتين العلاقتين للقارىء.

يوفر تحويل لابلاس وسيلة فاعلة لحل المعادلات التفاضلية الخطية العادية ذات الشروط الابتدائية ، لا سيما عندما تكون معاملات المعادلة ثابتة. فمعادلة الرتبة الثانية ، على سبيل المثال ،

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

بالشروط الابتدائية

$$y(0) = y_0 \quad , \quad y'(0) = y_1$$

تتحول باستخدام النتيجة (7.2.1)، إلى

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + a[sY - y(0)] + bY = F \tag{7.11}$$

حيث $Y(s) = \mathscr{L}[y]$ ، $F(s) = \mathscr{L}[f]$. ومن (7.11) نرى أن

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b} + \frac{(s+a)y(0) + y'(0)}{s^2 + as + b}$$

فنحصل على الحل

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathscr{L}^{-1}[Y] \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2 + as + b}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s+a)y(0) + y'(0)}{s^2 + as + b}\right] \end{aligned}$$

مثال (7.3)

أوجد حل النظام

$$y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-x} \quad , \quad x > 0$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0$$

الحل

نجري تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية ، فينتج عن ذلك

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4[sY - y(0)] + 6Y = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2 + 4s + 6)Y = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4s+6)}$$

$$= \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{cs+d}{s^2+4s+6}$$

$$2s + 1 = a(s + 1)(s^2 + 4s + 6) + bs(s^2 + 4s + 6) + (cs + d)s(s + 1)$$

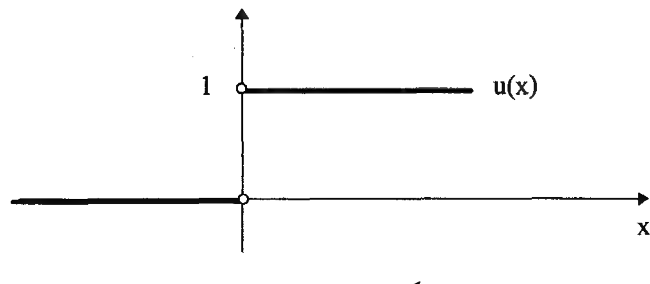
$$\Rightarrow a = 1/6 \ , \ b = 1/3 \ , \ c = -1/2 \ , \ d = -5/3$$

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2+2} - \frac{2}{3}\frac{1}{(s+2)^2+2}$$

$$y(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right] - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+2}\right] \quad (7.12)$$

إن تقويم الحدين الأخيرين من (7.12) يتطلب النظر في تأثير الانسحاب على محور s في التحويل العكسي $\mathcal{L}^{-1}$. والنظرية التالية تعالج تأثير الانسحاب ، سواء على محور s أو x ، على تحويل لابلاس. ولتبسيط صياغتها نقدم أولا تعريف **دالة الوحدة الدرجية** (unit step function)

$$u(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$



شكل (7.1)

تسمى u أيضا **دالة هيفيسايد** (Heaviside function) نسبة إلى المهندس الكهربائي الانجليزي (1925 - 1850) O.Heaviside. وهي دالة متصلة على $\mathbb{R}$ باستثناء النقطة $x = 0$ حيث نفضّل ألا نعرفها. لاحظ أن $\mathscr{L}[u] = 1/s$ حيث $s > 0$.

نظرية (7.3) (نظرية الانسحاب)

إذا كان $\mathscr{L}[f(x)] = F(s)$ ، حيث $s > \alpha$، فإن

$$\mathscr{L}[e^{ax}f(x)] = F(s-a) \ , \quad s-a > \alpha \tag{7.13}$$

$$\mathscr{L}[u(x-a)\, f(x-a)] = e^{-as}F(s) \ , \quad a \geq 0 \tag{7.14}$$

البرهان

المعادلة (7.13) نتيجة مباشرة لتعريف التحويل $\mathscr{L}$.

$$\mathscr{L}[e^{ax}f(x)] = \int_0^\infty e^{-(s-x)}f(x)dx$$

$$= F(s-a) \quad , \quad s-a > \alpha$$

وللحصول على (7.14) نلاحظ أن

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-s(t+a)}f(t)dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-sx}f(x-a)dx \tag{7.15}$$

بعد التعويض عن $t + a$ بالمتغير x. وباستخدام الدالة u نستطيع أن نعبر عن الطرف الأيمن من (7.15) بالشكل

$$\int_a^\infty e^{-sx}f(x-a)dx = \int_0^\infty e^{-sx}u(x-a)f(x-a)dx$$

$$= \mathscr{L}[u(x-a)f(x-a)] \qquad \square$$

نعود الآن إلى المعادلة (7.12). بما أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2}\right]=\cos\sqrt{2}\,x$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\,x$$

فإن تطبيق القاعدة (7.13) يقود إلى

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right]=e^{-2x}\cos\sqrt{2}\,x$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2+2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2x}\sin\sqrt{2}\,x$$

وبذلك يصبح حل المثال (7.3)

$$y(x)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos\sqrt{2}\,x-\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\sqrt{2}\,x$$

مثال (7.4)

أوجد y(t) التي تحقق

$$y'+2y=f(t)\quad,\quad y(0)=0$$

حيث

$$f(t)=\begin{cases}0 & , \; t\le 0\\ t & , \; 0<t<1\\ 0 & , \; t>1\end{cases}$$

شكل (7.2)

الحل

واضح أن

$$f(t)=t[u(t)-u(t-1)]$$

من المعادلة (7.9) ونظرية الانسحاب (7.3) نرى أن

$$\mathscr{L}[f] = -\frac{d}{ds}\{\mathscr{L}[u(t)] - \mathscr{L}[u(t-1)]\}$$
$$= -\frac{d}{ds}(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s})$$
$$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$$
$$(s+2)Y = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$$
$$Y(s) = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s+2} - e^{-s}\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+2} - e^{-s}\frac{1}{s}\frac{1}{s+2}$$
$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+2}] = e^{-2t}$$
$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}\frac{1}{s+2}] = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$
$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+2}] = \int_0^t \frac{1}{2}(1 - e^{-2\tau}) d\tau$$
$$= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2})$$

ومن القاعدة (7.14) نحصل على

$$\mathscr{L}^{-1}[e^{-s}\frac{1}{s}\frac{1}{s+2}] = \frac{1}{2}[1 - e^{-2(t-1)}]u(t-1)$$
$$\mathscr{L}^{-1}[e^{-s}\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+2}] = \frac{1}{2}[(t-1) + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} - \frac{1}{2}]u(t-1)$$

فنحصل بذلك على الحل

$$y(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}[1 - e^{-2(t-1)}]u(t-1)$$
$$-\frac{1}{2}[(t-1) + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} - \frac{1}{2}]u(t-1)$$
$$= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}[(t-1) - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{2}]u(t-1)$$

تدريب : ارسم الدالة $y(t)$.

مثال (7.5)

تتحول معادلة لاقير

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad , \quad x > 0$$

بتأثير $\mathcal{L}$ إلى

$$\frac{d}{ds}[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + sY - y(0) + \frac{d}{ds}[sY - y(0)] + nY = 0$$

$$-2sY - s^2Y' + y(0) + sY - y(0) + Y + sY' + nY = 0$$

$$(s - s^2)Y' + (n+1-s)Y = 0$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{n+1-s}{s(s-1)} = \frac{n}{s-1} - \frac{n+1}{s}$$

$$Y(s) = c\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

$$\Rightarrow y(x) = c\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right]$$

$$= ce^x\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}\right]$$

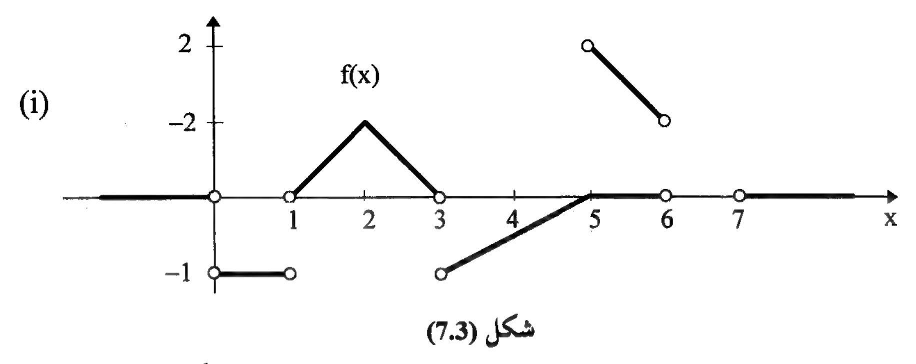
$$= \frac{c}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

وباختيار $c = 1$ نحصل على الصيغة (4.26) لكثيرات حدود لاقير.

تمارين (7.2)

(1) عبر عن الدوال التالية بدلالة دالة الوحدة الدرجية u.

(i)



شكل (7.3)

(ii) $$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & , \quad 0<x<2 \\ \cos\pi x & , \quad 2<x<7/2 \\ \sin\pi x & , \quad 7/2<x<9/2 \\ (2/9)x & , \quad x>9/2 \end{cases}$$

(2) ارسم الدوال التالية ثم اوجد تحويل لابلاس لكل منها

(i) $(x-1)u(x-1)$

(ii) $(x-1)^2u(x-1)$

(iii) $x^2u(x-1)$

(iv) $e^{-x}u(x-2)$

(v) $u(x-1)\sinh x$

(vi) $u(x-\frac{\pi}{2})\cos x$

(3) ارسم الدوال التالية التي يفترض أنها 0 خارج الفترة المعطاة، ثم اوجد تحويل لابلاس لكل منها

(i) $e^x \quad , \quad 0<x<1$

(ii) $x^2 \quad , \quad 1<x<2$

(iii) $1-e^{-x} \quad , \quad 0<x<1$

(iv) $\cos\pi x \quad , \quad 1<x<2$

(4) أوجد تحويل لابلاس العكسي لكل من

(i) e^{-6s}/s^3

(ii) $\dfrac{e^{-s}}{s^2+2s+2}$

(iii) $\dfrac{1}{s}(e^{-3s}+e^{-s})$

(iv) $\dfrac{1}{s-1}(e^{-3s}+e^{-s})$

(v) $\dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+9}$

(5) أوجد الحل لكل مما يلي

(i) $y''+4y'+5y=0 \quad , \quad y(0)=1 \;,\; y'(0)=1$

(ii) $9y''-6y'+y=0 \quad , \quad y(0)=3 \;,\; y'(0)=1$

(iii) $y''+4y'-10y=12\cos 2x \quad , \quad y(0)=1 \;,\; y'(0)=3$

(iv) $y''+2y'-8y=-256x^3 \quad , \quad y(0)=15 \;,\; y'(0)=36$

(v) $y''+2y'-8y=-e^{-3x}+3e^{-5x} \;,\; y(0)=4 \;,\; y'(0)=-2$

(vi) $y''+2y'+2y=x[u(x)-u(x-1)]$

(vii) $y''+y=\begin{cases}\sin x & , \; 0<x<\pi \\ -2\sin x & , \; x>\pi\end{cases} \;, y(0)=0 \;,\; y'(0)=1$

(6) استخدم المعادلة (7.9) أو المعادلة (7.10) لإيجاد تحويل تحويل لابلاس العكسي لكل من

(i) $\dfrac{s}{(s^2+9)^2}$

(ii) $\log\dfrac{s+a}{s+b}$

(iii) $\log\dfrac{s}{s-1}$

(iv) $\cot^{-1}(s+1)$

(7) تعرَّف الدالة $Si : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالتكامل المعتل

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

وتسمى **تكامل الجيب** (Sine integral). أثبت أن

$$\mathcal{L}[\frac{\sin x}{x}] = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[Si(x)] = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

(8) افرض أن كلا من الدالتين f و g تتلاشى على $(-\infty,0)$. يترتب على ذلك أن **التفاف** الدالتين (convolution)

$$f*g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)dt$$

$$= \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

إذا كان $\mathcal{L}[f]$ و $\mathcal{L}[g]$ موجودان فأثبت أن

$$\mathcal{L}[f*g] = \mathcal{L}[f] \,.\, \mathcal{L}[g]$$

(9) إذا كانت الدالـــــة f دورية في p، بمعنى أن $f(x+p) = f(x)$ لكل $x \geq 0$، فأثبت أن

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-sx} f(x)dx \quad , \quad s > 0$$

(10) افرض أن $f(x) = x$ لكل $0 \leq x < 1$، $f(x+1) = f(x)$ لكل $x \geq 0$، $f(x) = 0$ لكل $x < 0$. أوجد $\mathcal{L}[f]$.

(11) إذا كانت $f(x) = e^x$ و $g(x) = 1/\sqrt{\pi x}$ فأثبت أن

$$f*g(x) = e^x \operatorname{erf}(\sqrt{x})$$

استنتج من ذلك صيغة $\mathcal{L}[e^x \operatorname{erf}\sqrt{x}]$ وكذلك $\mathcal{L}[\operatorname{erf}\sqrt{x}]$

(12) أوجد $\mathcal{L}[[x]]$ ، حيث $[x]$ هو الجزء الصحيح من العدد (غير السالب) x ، أي أن

$$[x] = n \qquad \forall\, x \in [n, n+1) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

المراجع

1. محمد بن عبدالرحمن القويز، صالح عبدالله السنوسي، محمود أحمد عطوة، "مبادىء التحليل الحقيقي - الجزء الأول"، مطابع جامعة الملك سعود، ١٤١٨هـ (١٩٩٧م).
2. صالح عبدالله السنوسي، محمد بن عبدالرحمن القويز، "مبادىء التحليل الحقيقي - الجزء الثاني"، مطابع جامعة الملك سعود، ١٩٨٨م.
3. محمد بن عبدالرحمن القويز، "التحليل المركب - الجزء الأول"، مطابع جامعة الملك سعود، ١٩٨٨م.
4. G. Birkhoff and G.C. Rota, "Ordinary Differential Equations", 2nd ed., John Wiley, New York, 1969.
5. R. Creighton Buck. "Advanced Calculus", 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.
6. R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics", vol. I, Interscience, New York, 1955.
7. Earl A. Coddington and Norman Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill, New York, 1955.
8. Gerald B. Folland, "Fourier Analysis and its Applications", Brooks/Cole, Pacific Grove, 1992.
9. Paul R. Halmos, "Finite-Dimensional Vector Spaces", 2nd ed., Van Nostrand, Princeton, 1958.
10. E. L. Ince, "Ordinary Differential Equations", Dover, New York, 1956.
11. Erwin Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics", 7th ed., John Wiley, New York, 1993.
12. Walter Rudin, "Principle of Mathematical Analysis", 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1964.
13. G. N. Watson, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions", 2nd ed., Cambridge University Press, 1944.

الرموز الرياضية

$\mathbb{R}$ مجموعــة الأعداد الحقيقيــة

$\mathbb{C}$ مجموعــة الأعداد المركبــة

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$

$\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$

$C(I)$ مجموعة الدوال المتصلة على الفترة I

$C^n(I) = \{f \in C(I) : f^{(n)} \in C(I)\}$

$\mathcal{L}^2(I)$ 14 صفحة

$\mathcal{L}^1(I)$ 161 صفحة

$W(\cdot , \cdot)$ 44 صفحة

L 58 صفحة

L^* 59 صفحة

Δ 157 صفحة

D_n 91 صفحة

P_n 108 صفحة

Q_n 109 صفحة

كشاف الموضوعات وثبت المصطلحات

ح

خ

د

ر

ش

ص

ط

ع

ف

ق

ك

م

ن